SCANNED

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

8487—9228

*

№ 12 1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Г. Д. Афанасьев, В. И. Дикушин, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), В. В. Покашевский, Л. И. Седов, В. В. Сертинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 1
Основания математики и математическая логика 4
Теория чисел 7
Алгебра 12
Многочлены и линейная алгебра . . . 13
Группы 15
Поля, кольца и структуры 20
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 26
Теория функций действительного переменного 30
Теория множеств 31
Приближение функций полиномами и их обобщениями 32
Теория функций комплексного переменного 35
Дифференциальные уравнения 46
Обыкновенные дифференциальные уравнения 46
Уравнения в частных производных . . . 56
Приложения к физике, технике и естественным наукам 69
Интегральные уравнения 74
Приложения интегральных уравнений 76
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 77
Числовые ряды 81
Специальные функции 84
Интегральные преобразования и операционное исчисление 85
Приложения общих методов математического анализа 87
Функциональный анализ 88
Теория вероятностей 93
Математическая статистика 97
Теория игр и математическая экономика 98
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 99
Геометрия 102
Приложения геометрии 104
Проективная и начертательная геометрия 105
Алгебраическая геометрия 106
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 108
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 111
Метрические методы в геометрии . . . 117
Геометрия выпуклых многообразий . . 118
Численные и графические методы 119
Таблицы 119
Вычислительные машины и математические приборы 119
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 141
Новые книги, поступившие в редакцию . . 143
Авторский указатель 144

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

Рефераты 8487—9228 **№ 12** **Декабрь 1956 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

8487. **Новый реферативный журнал по математике. Митринович** (Nov referativni časopis za matematiku. Mitrinović D.S.) Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, 6, № 3—4, 267—270 (сербо-хорв.)
Рецензия на реферативный журнал Математика.

8488. **Работы К. Ф. Гаусса по геометрии поверхностей. Погорелов А. В.** В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 1. М., АН СССР, 1956, 61—63

8489. **Труды К. Ф. Гаусса по теории чисел и алгебре. Венков Б. А.** В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 1, М., АН СССР, 1956, 54—60

8490. **Об исследованиях по проблеме П. Л. Чебышева. Кельберт С. Л.**, УзССР фанлар акад. ахбороти, Изв. АН УзССР, 1956, № 3, 89—95 (рез. узб.)
Обзор научных работ профессора Д. Г. Гребенюка в области приближенного анализа.

8491. **Рукописное наследие Е. С. Федорова. Раскин Н. М., Шафрановский И. И.**, Вестн. АН СССР, 1956, № 1, 71—77

8492. **К. Д. Ушинский о преподавании арифметики. Фридман Л. М.**, Матем. в школе, 1956, № 1, 12—14

8493. **Учебный опыт выдающихся русских и советских математиков. Черняев М. П.**, Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-т, 1955, вып. 3, 5—18

8494 К. **Общая теория математики в историческом плане. Ивата** (歷史的にみた數學概論. 岩田至康. 文憲堂七星社, 250 頁, 350 圓). Бункэндосиссэйся, 1954, 250, стр. 350 иен) (япон.)

8495 Д. **Казанская школа математического образования (в характеристиках ее главнейших деятелей). Болгарский Б. В.** Автореф. дисс. докт. пед. н. Казанск. ун-т, Казань, 1955

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

8496. **Рождение чисел. Вилла** (La nascita dei numeri. Villa Emilio), Civiltá macchine, 1956, 4, № 2, 80—81 (итал.)
Использование языков малоразвитых народов может дать материал для суждения о постепенном развитии системы счисления. У туземцев Америки можно встретить примеры двоичной системы (1 — человек, 2 — руки, глаза или какие-нибудь другие парные органы тела), при помощи которых обозначаются числа даже до шести (2 + 2 + 2). Пятеричная и десятичная системы требуют уже значительной степени математического развития.
В большинстве случаев дальнейшее развитие систем счисления идет по линии привлечения названий частей человеческого тела. Интересные примеры взаимного влияния различных числовых систем: в Южной и Центральной Америке и Меланезии встречаются комбинации шестеричной и десятичной систем, которые могут объяснить происхождение шестидесятиричной системы счисления вавилонской математики. В более развитых системах имеются различные названия одних и тех же чисел в применении к счету различных предметов (люди, животные, неодушевленные предметы). Интересным примером взаимного влияния является появление названия «десяти тысяч» в языке кечуа (Перу), kunu, ono, wunu, не встречающегося в языках соседних народов (аймары и арауканцы), но принесенного из Полинезии (mano, wano, ono) и в свою очередь восходящего к китайскому man. И. Н. Веселовский

8497. **Архимед и Декарт — творцы математических методов. Салтыков** (Архимед и Декарт — творцы математичких метода. Салтиков Н.), Настава матем. и физ., 1954, 3, № 2, 65—77 (серб., рез. франц.)
В первой части статьи дается обзор научной деятельности Архимеда в области математики. Подчеркивается, что Архимед ввел в математику своего времени новые методы; некоторые из них по существу основаны на оперировании бесконечно малыми величинами. В трудах Архимеда, таким образом, содержались важные предпосылки для создания (в отдаленном будущем) анализа бесконечно малых. Однако было бы неправильно разъяснять его методы с помощью современного нам дифференциального и интегрального исчисления. Это не обеспечивало бы передачу идейной сущности и всех тонкостей исследований Архимеда. Значение математических работ Архимеда заключается в том, что он предугадал характер «математических знаний, необходимых для развития культуры, и указал человечеству путь в этой области культурной жизни» (стр. 67).
Вторая часть статьи содержит характеристику математического творчества Декарта. Последний, работая над проблемой создания универсального метода, ввел, подобно Архимеду, в математику новые общие теории, содержащие необходимые предпосылки для громадного прогресса математики и создания новых ее отраслей: аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления и др. Отмечается сходство математического творчества Архимеда и Декарта не только в части смелости и гениальности замысла, но и в под-

ходе к разработке математических методов, а также в исторической роли этих методов. К. А. Рыбников

8498. **Теория движения планет Аполлония. Нёйгебауэр** (Apallonius, planetary theory. Neugebauer O.), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 4, 641—648 (англ.)

Указывается, что основой теории планетных движений Птолемея является идея равномерных круговых движений, впервые высказанная и обоснованная Аполлонием Пергским еще в III в. до н. э. Рассматривается развитие этой идеи Аполлония в «Альмагесте» Птолемея, в применении главным образом к теории движения Марса. Отмечается значение научного наследия Аполлония для формирования научного мировоззрения Коперника. Ю. Г. Перель

8499. **Библиография старорусских математических рукописей. Швецов** (Бібліографія староруських математичних рукописі в. Швецов К. І.), Наук. зап. Станіславськ. держ. пед. ин-та, 1955, сер. физ.-матем., вип. 1, 49—103 (укр.)

Дается довольно полный перечень старорусских математических рукописей XIII—XVII вв., сопровождаемый автором библиографическими указаниями. В перечень вошли в основном рукописи центральных библиотек Москвы и Ленинграда. Общее число зарегистрированных рукописей 211; в это число входят с одной стороны известные только по литературным источникам, с другой стороны — десятки раз переписывавшиеся «Арифметика» Магницкого и «Геометрия» 1708 г. и некоторые другие, изданные печатно книги.

И. Я. Депман

8500. **Американская математика** (American mathematics), Math. Teacher, 1956, 49, № 1, 30—33 (англ.)

Приводятся факты, свидетельствующие об относительно высоком уровне математической культуры некоторых индейских народов, исконных обитателей американского континента. Испанцы выпустили первую печатную книгу по математике в 1556 г. в Мексике. До 1708 г. известны лишь 7 мексиканских и 4 перуанских математических книг, имеющих учебный и практический характер. Такой же характер имело подавляющее большинство книг, вышедших в Америке на английском языке до середины 19 в. Бурный рост математических научных исследований отмечается лишь в течение последних 75 лет. За это время были основаны: первый американский научный журнал по математике «American Journal of Mathematics» (1878), Нью-йоркское математическое общество (1888), позднее (с 1894 г.) ставшее Американским математическим обществом. В настоящее время в США функционирует ряд математических организаций: Общество индустриальной и прикладной математики, Общество символической логики, Институт математической статистики, Эконометрическое общество и др. Выпускается более 16 научных математических журналов.

Статья снабжена обильными библиографическими справками и содержит призыв к разработке проблем истории математики в США и других странах американского континента, так как эти проблемы еще слабо изучены, а факты истории мало известны широким кругам математиков. К. А. Рыбников

8501. **Триста лет теории вероятностей. Мартич** (Tristo godina teorije vjerojatnosti 1654—1954. Martić Ljubo), Nastava mat. i fiz. srednjoj školi, 1953, 2, № 4, 198—203 (хорв.)

8502. **Вступительная лекция Николо Тартальи брешианца к трудам Евклида из Мегары, весьма проницательного математика** (Leçon inaugurale de Nicolo Tartaglia brisciano sur toute l'oeuvre d'Euclide de Megare, mathèmaticien très subtil), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1956, 35, № 176, 281—287 (франц.)

Французский перевод вводной лекции Н. Тартальи к курсу математики, опубликованной на венецианском диалекте в посмертном издании «Евклида» Тартальи (1569).

8503. **Открытие рукописи Абеля. Брун** (Découverte d'un manuscrit d'Abel. Brun Viggo), Rev. histoire sci., 1955, 8, № 2, 103—106 (франц.)

Сообщение о том, что автор в 1952 г. во Флоренции нашел считавшуюся утерянной рукопись знаменитого норвежского математика Н. Абеля «Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes» («Мемуар об одном весьма обширном классе трансцендентных функций»), посвященную интегрированию алгебраических выражений и содержащую теорему Абеля. Рукопись эту Абель представил Парижской академии наук 30 октября 1826 г. Лежандр и Коши доложили о ней лишь 29 июля 1829 г. уже после смерти Абеля. Напечатана же она была только в 1841 г. в «Mémoires présentés par divers savants», VII, 176—264.

В найденной рукописи оказалась заметка, написанная рукой Лежандра, где отмечается, что задержка с докладом и опубликованием произошла по вине самих Лежандра и Коши, весьма в то время занятых. Серьезных расхождений между текстом рукописи и опубликованным текстом мемуара не существует.

К. А. Рыбников

8504. **Неопубликованное письмо К. Ф. Гаусса. Кольман Э.**, Тр. ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1955, 385—394

Факсимиле, оригинал и перевод на русский язык письма К. Ф. Гаусса от 29 июля 1844 г. непременному секретарю Петербургской Академии наук П. Н. Фуссу. Гаусс благодарит за присылку материалов тригонометрической съемки некоторых губерний России и сообщает элементы орбиты кометы 1844 II, открытой Ф. В. Мовэ (1809—1854) — астрономом Парижской обсерватории. Гаусс также сообщает о своих занятиях русским языком, о прочитанных русских книгах и просит прислать ему «Капитанскую дочку» Пушкина и другие книги. Публикация снабжена примечаниями Э. Кольмана.

К. А. Рыбников

8505. **Письмо К. Ф. Гаусса И. М. Симонову.** В сб.: Историко-математические исследования. Вып. 9, М., Гостехиздат, 1956, 101—106

Датировано 2 сентября 1848 г. Адресовано И. М. Симонову (1794—1855) — ректору Казанского университета, известному астроному и магнитологу. Содержит отзыв о книге И. М. Симонова «Записки и воспоминания о путешествии по Англии, Франции, Бельгии и Германии» (Казань, 1844). Гаусс также благодарит за избрание его почетным членом Казанского университета, состоявшееся 21 октября 1814 г. ст. ст., но бывшее ему неизвестным.

Подготовил письмо к печати, перевел на русский язык и снабдил комментариями А. Д. Дубяго. Факсимиле письма печаталось в Казани в 1940 г. в книге Я. С. Романова «Краткий очерк истории научной библиотеки Татарской республики при Казанском государственном университете (1804—1939).» Приписка Гаусса к письму с приветом Н. И. Лобачевскому опубликована в 1948 г. Л. Б. Модзалевским в «Материалах для биографии Н. И. Лобачевского», стр. 527. К. А. Рыбников

8506. **Август Леопольд Крелле (1780 — 1855). К столетию со дня смерти. Эмерслебен** (August Leopold Crelle (1780—1855) zum 100. Todestag. Emersleben Otto), Wiss. Ann., 1955, 4, №10, 651—656 (нем.)

Инженер и математик Крелле — автор больших таблиц умножения (есть издание 1954 г.) и основатель журнала «Journal für die reine und angevandte Mathematik» (1826), называемого обычно «Журналом Крелле».

(у нас часто ошибочно «Журналом Крелля»). При жизни Крелле вышло 52 тома журнала; в 1955 г. журнал дошел до 194-го тома (под ред. члена Берлинской академии наук Г. Хассе) В первых 6 томах журнала напечатаны 24 работы Абеля, обеспечившие изданию сразу высокую репутацию. Журнал требовал от Крелле больших затрат; правительственной субсидии, несмотря на неоднократные ходатайства влиятельного А. Гумбольдта, журнал не получил. Крелле был самоучкой-инженером, добившимся звания «Königlich-Preußisch Geheime Oberbaurath»., и самоучкой-математиком, избранным в 1827 г. в члены математического класса Берлинской академии наук, в изданиях которой он опубликовал 32 мемуара. Он автор и большого числа технических трудов и издатель 30 томов журнала «Journal für die Baukunst». Крелле был членом-корреспондентом Петербургской академии наук с 1834 г.

И. Я. Депман

8507. **Джордж Бул. Тейлор** (George Boole 1815—1864. Taylor Geoffrey), Proc. Roy. Irish. Acad., 1955, **A57**, № 6, 66—73 (англ.)

Биография Була, написанная его внуком на основании воспоминаний жены Була. Не имеющий ни университетского образования, ни ученых степеней Бул в 1849 г. избирается профессором математики в Корке. В 1847 г. им был издан «Mathematical Analysis of Logic», а в 1854 г.— «The Laws of Though»; столетие появления этой книги было торжественно отмечено Ирландской академией наук. Из пяти дочерей младшая — Этель Войнич (автор «Овода»). Третья дочь Алиса, не получив математического образования, методами евклидовой геометрии построила трехмерные проекции всех шести правильных тел четырехмерного пространства. Много лет позднее она увидела эти сечения в ученом труде профессора Грёнингенского университета Шаута, который, получив фотокопии с «игрушек» английской дамы, был крайне удивлен, встретив в них результаты, которые он получил аналитическим методом. За этим последовал ряд лет совместной работы профессора Шаута и Алисы Бул-Стотт. После смерти Шаута Алиса Стотт еще ряд лет работала совместно с членом Лондонского королевского общества Коксетером в области многомерной геометрии. Четвертая дочь Була Люси была первой в Англии женщиной профессором химии в Лондоне. Жена Була — Мери Эверест — племянница сэра Эвереста, давшего имя горе Эверест, написала ряд книг по психологии и педагогике. И. Я. Депман

8508. **О роли педагогов-математиков М. Е. Ващенко-Захарченко и М. С. Волкова в популяризации идей Лобачевского. Гайдук Ю. М.**, Матем. в школе, 1956, № 2, 74—76

В 80-х гг. прошлого века в России ряд ученых и педагогов пропагандировали идеи неевклидовой геометрии Лобачевского и пытались их использовать для перестройки преподавания математики в средней школе. Профессор Киевского университета М. Е. Ващенко-Захарченко издал в 1878—1880 гг. свой перевод «Начал» Евклида, изложив во введении элементы гиперболической геометрии и очерк ее исторического развития. В сочинении «Элементарная геометрия в объеме гимназического курса» (Киев 1883) он проводил мысль о необходимости постепенного ознакомления учащихся с идеями неевклидовой геометрии и принципами строгого построения основ геометрии.

В те же годы петербургский педагог-математик М. С. Волков выпустил две книги: «Учение о пространстве или рациональная геометрия» (1882) и «Пантригонометрия» (1886), посвященные неевклидовой геометрии. К. А. Рыбников

8509. **Андрей Андреевич Марков. Михок** (Andrei Andreevici Markov. Mihoc G.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1955, Ser, 3a, 9, № 2, 95—106 (рум.)

Даны краткий биографический очерк А. А. Маркова и детальный обзор его работ по теории вероятностей. Б. В. Гнеденко

8510. **О преподавании математики в Харьковском технологическом институте в XIX и начале XX столетия. Бахмутская Э. Я.**, Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1955, 5, 185—191

8511. **Понятие функции в курсе алгебры русской дореволюционной средней школы в XX веке (1900—1917). Бычков Б. П.**, Матем. в школе, 1955, № 6, 1—8

Разные проекты реформы школы, начиная с 1899 г., требовали введения понятия функции в курс средней школы. Это требование было удовлетворено для реальных училищ в 1906 г. введением в курс VII класса элементов аналитической геометрии и анализа, в кадетских корпусах в 1911 г. после опытного преподавания этих предметов в нескольких корпусах. Оба Всероссийских съезда преподавателей математики (1910—1913) высказались за введение понятия координат, функции и графиков и в курс гимназии. Осуществления это требование до революции в широком масштабе не получило.

Примечание референта Автор не упоминает о большой сети коммерческих училищ, в которых преподавались основы аналитической геометрии. И. Я. Депман

8512. **К столетию со дня рождения Франца Хочевара. Повшич** (Povodom stogodišnjice rodenja Franca Hočevara. Povšič Jože), Nastava mat. i fiz. srednjoj školi, 1953, 2, № 4, 226—232 (словен.)

8513. **Некролог Эмиля Бореля. Монтель** (Notice nécrologique sur Émile Borel. Montel Paul), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 7, 845—850 (франц.)

Речь акад. П. Монтеля на заседании Академии наук в Париже 13 февраля 1956 г., посвященная памяти Эмиля Бореля (1871—1956), скончавшегося 3 февраля 1956 г. К. А. Рыбников

8514. **Вручение ордена Республики академику Богумилу Быджовскому. Ярник** (Udělení řádu republiky akademiku Bohumilu Bydžovskému. Jarník V.), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 4, 503 (чеш.)

8515. **Гаральд Бор** (1887—1951). **Курепа** (Harald Bohr (1887—1951). Курепа Гуро), Наука и природа, 1955, 8, № 4—5, 183—184 (серб.)

8516. **Некролог Германа Вейля. Данжуа** (Notice nécrologique sur M. Hermann Weyl. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 24, 1665—1667 (франц.)

Речь акад. А. Данжуа на заседании Академии наук в Париже 14 декабря 1955 г., посвященная памяти Германа Вейля (1885—1955), скончавшегося 8 декабря 1955 г. в Цюрихе (Швейцария). К. А. Рыбников

8517. **Мейер Эйбрахам Гершик (1908—1955). Блэкуэлл, Боукер** (Meyer Abraham Girschick 1908—1955. Blackwell David, Bowker Albert H.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 365—367 (англ.)

8518. **Академик Юр Гронец награжден орденом труда. Шварц** (Akademik Jur. Hronec vyznamenaný radom práce. Schwarz Št.), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 4, 503—504 (словац.)

8519. **Профессор Фран Ерап (1881—1954). Ахлин** (Profesor Fran Jeran (1881—1954). Ahlin Fr.), Nastava matem. i fiz., 1954, 3, № 1, 64 (словац.)

8520. **Вольфганг Дёблин (1915—1940). Леви** (W. Doeblin (V. Doblin) (1915—1940). Lévy P.), Rev. histoire sci, 1955, 8, № 2, 107 — 115 (франц.)

Приведены краткие биографические сведения о талантливом математике Дёблине, погибшем 21 июня 1940 г. от рук гитлеровцев, а также дан научный апа-

лиз его работ; в конце приведен список работ, насчитывающий 27 названий. Б. Гнеденко.

8521. **Жизнь и деятельность профессора и инженера Иона Ионеску. Буйклиу** (Personalitatea şi opera lui Ion Ionescu. Buicliu Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A**, № 9, 512—518 (рум.)

8522. **К семидесятипятилетию Вальтера Лицмана. Цюльке** (Walter Lietzmann zum 75. Geburtstage. Zühlke P.), Math.-phys. Semesterber., 1955, **4**, № 3—4, 161—164 (нем.)

8523. **Доктор Лав Нетович. (Некролог). Симович** (Др. Лав Нетовић. (In memoriam). Симовић М.), Настава матем. и физ., 1954, **3**, № 1, 63—64 (серб.)

8524. **Владимир Семенович Федоров. (К 40-летию научно-педагогической деятельности). Кованько А.С.**, Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 193—196

8525. **Георге Цицейка. Георгиу** (Gheorghe Ţiţeica. Gheorghiu Gh. T.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A**, № 9, 518—522 (рум.)

8526. **Академик Словацкой АН Штефан Шварц удостоен государственной премии им. Клемента Готвальда за труды в области математики. Коржинек** (Akademik SAV Štefan Schwarz vyznamenán státní cenou Klementa Gottwalda z matematiky v roce 1955. Kořínek V.), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 4, 501—503 (чеш.)

8527. **Памяти Альберта Эйнштейна. Самоши** (Albert Einstein emlékezete. Szamosi Géza), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. oszt. közl., 1955, **5**, № 3, 359—375 (венг.)

См. также: 8532, 8568, 8569

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

8528. **Логические основания арифметики. Колем** (The logical background of arithmetic. Skolem Th.), Bull. Soc. math. Belgique, 1953 (1954), **6**, 23—34 (англ.)

Ставится вопрос о строгом обосновании арифметики с точки зрения теории множеств и математической логики. Прежде всего указывается на три основных направления в рассмотрении сущности арифметики, возникшие во второй половине XIX столетия. Дедекинд рассматривал теорию положительных чисел, как часть чистой логики. Против этой точки зрения выступали Пуанкаре, Брауэр. Последний выразил следующую точку зрения: логика должна базироваться на математике (арифметике), а не обратно. В основе третьей точки зрения лежит эмпиризм, основанный С. Миллем Приверженцем ее является Фреше (Fréchet): математика должна базироваться на экспериментах, ведущих к предположениям общего характера, которые могут быть проверены новыми экспериментами, так же как и в естественных науках.

Сделав несколько критических замечаний по поводу этих точек зрения, автор излагает современный взгляд на природу арифметики, в основе которого лежит аксиоматический метод. Автор приводит следующие фрагменты арифметики:

Система S. Алфавит: 1, $=$, $<$.

Определяющие правила: 1) 1 — число. 2) Если a — число, то $a1$ — тоже число. 3) Если a и b —числа, то $a=b$ — равенство. 4) Если a и b — числа, то $a<b$ — неравенство

Аксиомы. 5) $1 = 1$ — правильное равенство. 6) $1<11$ — правильное неравенство.

Правила вывода. 7) Если $a = b$ — правильное равенство, то $a1 = b1$. 8) Если $a<b$ — правильное неравенство, то $a1<b1$. 9) Если $a<b$ и $b<c$ — правильные неравенства, то $a<c$.

Затем строится система S' с алфавитом 1, $=$, $<$, v и дополнительными правилами: 10) $v = v$ — правильное равенство. 11) Если число поставить вместо v в правильную формулу, содержащую v, результат будет правильной формулой. S' является консервативным расширением S, т. е. числовые равенства, которые доказуемы в S', доказуемы и в S.

Система S_1. Алфавит: 1, $=$, $+$, (,).

Определяющие правила: 1) 1 — число. 2) Если a — число, то $a1$ — тоже число. 3) Каждое число—терм. 4) Если t — терм, то $t1$ —тоже терм. 5) Если t и u — термы, то $(t + u)$ — терм. 6) Если t и u — термы, то $t = u$ — равенство.

Аксиомы и правила вывода. 7) Пусть a — число, тогда $(a + 1) = a1$ — правильное равенство. 8) Пусть a и b — числа, тогда $(a + b1) = (a + b)1$— правильное равенство. 9) Для каждого терма t, $t = t$— правильное равенство. 10) Если $t = u$ — правильное равенство, то $u = t$. 11) Если $t = u$ и $u = v$ — правильные равенства, то $t = v$. 12) Если $t = u$ правильно, то $t1 = u1$ — правильное равенство. 13) Если $t = u$ правильно, то $(t + v) = (u + v)$ и $(v + t) = (v + u)$— правильные равенства.

Доказывается, что S_1 также является консервативным расширением S.

Автор отмечает, что полная теория Σ примитивных рекурсивных функций — консервативное расширение S. Утверждается также, что теория Σ' является консервативным расширением Σ и, следовательно, S; Σ' получена из Σ прибавлением индуктивной схемы

$$\frac{f(0, a_2, a_3, \ldots) = 0 \qquad \overline{sg}f(a_1, a_2, \ldots).\, f(a_1 + 1, a_2, \ldots) = 0}{f(a_1, a_2, \ldots) = 0}$$

Здесь $\overline{sg}x$ —функция, которая $=1$, или 0 соответственно тому, как $x = 0$ или >0. В Σ' употребляются формулы, содержащие переменные. Они являются знаками, прибавленными к алфавиту Σ для образования алфавита Σ'. Наконец, мы имеем правило подстановки: если в правильной формуле переменную заменить произвольным арифметическим термом, то получится правильная формула. В Σ' можно, например, доказать ассоциативный закон сложения. Автор замечает, что употребление интерпретаций отличает его метод от метода школы Гильберта. Именно доказательства непротиворечивости по гильбертовскому методу связаны с привлечением соображений более сложной природы, чем рассматриваемая система, а это, по мысли автора, создает опасность регресса в бесконечность. Автор надеется с помощью своей установки избавиться от этой опасности. Т. Л. Майстрова

8529. **О неконструктивных теоремах анализа и проблеме разрешимости. Гудстейн** (On non-constructive theorems of analysis and the decision problem. Goodstein R. L.), Math. scand., 1955, **3**, № 2, 261—263 (англ.)

Через $\mathfrak{A}$ обозначается некоторая (не уточняемая в статье) формализация рекурсивной арифметики, а через $\mathfrak{A}^*$ — расширение $\mathfrak{A}$ на область рациональных чисел и функций от них. Если $f(n, x)$ — рациональная рекурсивная

функция, рекурсивно сходящаяся по n, дифференцируемая по x (при $0 \leqslant x \leqslant 1$) относительно n и $f(n, 0) = f(n, 1) = 0$, то пишут $f \in RT$. Через $f^1(n, x)$ обозначается относительная производная функции $f(n, x)$. (По поводу определений см. РЖМат 1954, 4706; 1956, 1913; в последнем реферате в пункте 1.2 разность $f(n, x) - g(n, x)$ следует заменить разностью $f(n_1, x) - f(n_2, x)$.

Пусть существуют такие рекурсивные функции c_k и v_k и число $\mathbf{p}$, что имеют место неравенства

$$1/\mathbf{p} < c_k < 1 - 1/\mathbf{p} \qquad (\alpha)$$

(при любом k) и что импликация

$$n \geqslant v_k \to f^1(n, c_k) = O(k) \qquad (\beta)$$

выводима в $\mathscr{R}^*$ со свободным переменным n; тогда пишут $f \in URT$ (хотя про k ничего не сказано, но по-видимому, k нужно также рассматривать как свободное переменное. *Реф.*)

Если имеют место неравенства (α) и если импликация (β) выводима при каждом значении переменного n, то пишут $f \in IRT$. Основное утверждение работы состоит в том, что существует функция $f \in RT \setminus IRT$.

Примечание референта. Ряд утверждений автора вызывает возражения:

1. Утверждается, что в предыдущей работе автора (РЖМат, 1954, 4706) дан пример функции $f \in RT \setminus URT$. Это утверждение, однако, остается бездоказательным, поскольку (см. прим. референта к цитированному реферату) про построенную функцию f в указанной работе доказывалось лишь, что $f \in RT \setminus URT^{\sim}$, где через $URT^{\sim}$ мы обозначили класс функций из URT, для которых выводимо (со свободным переменным k) неравенство (α).

2. Остается непонятным, почему основное утверждение работы следует из того, что в $\mathscr{R}^*$ невыводима импликация

$$f \in RT \to f \in IRT. \qquad (\gamma)$$

3. Объявив, что будет доказываться невыводимость в $\mathscr{R}^*$ импликации (γ), автор доказывает на самом деле невозможность того, чтобы для всех f была верна импликация

$$f \in RT \to f \in IRT^{\sim}, \qquad (\delta)$$

где через $IRT^{\sim}$ мы обозначили и класс функций из IRT, для которых выводимо (со свободным переменным k) неравенство (α).

Тем не менее, по-видимому небольшая модификация содержащихся в реферируемой работе рассуждений позволит действительно доказать (от противного) требуемое утверждение. В. А. Успенский

8530. Исследование частично-рекурсивных операторов средствами теории бэровского пространства. Кузнецов А. В., Трахтенброт Б. А., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 5, 897—900

Рассматривается бэровское пространство J, состоящее из всех функций, отображающих натуральный ряд в себя (ноль считается натуральным числом). Множество всех кортежей взаимно однозначно перенумеровывается некоторой примитивно-рекурсивной нумерацией. Через $\delta^{(n)}$ обозначается бэровский интервал, определяемый кортежем, имеющим номер n. Множество, представимое в виде $\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta^{a(n)}$, где a — общерекурсивная функция (о. рф.), называется эффективно (эфф.) открытым, а его дополнение — эфф. замкнутым; множество, представимое в виде $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta^{a(m,n)}$, где a — о. р. функция, называется эфф. G_δ и т. д. Изучаются одноточечные множества указанных типов. Оказывается, например, что если множество $\{\alpha\}$, состоящее из единственной функции («точки») α, эфф. замкнуто, то α либо о. р. ф., либо не мажорируется никакой о. р. ф. (теорема 7). Выясняется связь между эфф. замкнутыми одноточечными множествами и рекурсивно-проективными функциями (р.-прф.), т. е. функциями, графики которых входят в р.-пр. классификацию Клини — Мостовского. Оказывается, например, что: а) для всякой р.-пр. ф. φ существует такое эфф замкнутое одноточечное $\{\alpha\}$, что φ общерекурсивна относительно α; б) существует такое эфф. замкнутое одноточечное $\{\alpha\}$, что α не есть р.-пр. ф.

Отображение F подмножества $M \subseteq J$ в J называется эффективно непрерывным, если существует такой частично-рекурсивный оператор (ч.-р. о.) $g = R[f]$ (регулятор непрерывности), вполне применимый (РЖМат, 1956, 4282) к каждой функции из M, что из неравенства $\rho[f, f_1] < g(n)^{-1}$ следует при $f, f_1 \in M$, что $\rho[F(f), F(f_1)] < n^{-1}$. Отображение называется эффективно равномерно непрерывным, если существует такая о. р. ф. r (регулятор равномерной непрерывности), что из неравенства $\rho[f, f_1] < r(n)^{-1}$ следует при $f, f_1 \in M$, что $\rho[F(f), F(f_1)] < n^{-1}$. Формулируется следующий результат (теорема 3, второе утверждение): для всякого эфф. непрерывного отображения $h = F[f]$ множества $M \subseteq J$ в J существует такая функция θ и такой ч.-р. о. $g = T[f]$, что $h(x) = \theta(g(x))$, если $f \in M$ (Легко видеть, что и обратно, всякое отображение F, для которого верно указанное утверждение, является эфф. непрерывным. *Реф.*)

Множество $M \subseteq J$ называется эфф. компактом, если существует ч.-р. о., который каждую такую функцию f, что $\{\delta^{f(0)}, \delta^{f(1)}, \ldots, \delta^{f(n)}, \ldots\}$ есть покрытие множества M, перерабатывает в такое число k, что уже $\{\delta^{f(0)}, \delta^{f(1)}, \ldots, \delta^{f(k)}\}$ является покрытием.

Теорема 4. Отображение, эфф. непрерывное на эфф. компакте, эфф. равномерно непрерывно на нем.

Введенные понятия и результаты применяются к теории ч.-р. о., определенных на функциях одного аргумента. Через O_T обозначается область общеопределенности оператора T, т. е. множество всех тех функций из J, к которым T вполне применим. Для операторов, принимающих в качестве значений функции одного аргумента, формулируются следующие теоремы:

Теорема 1. Всякий ч.-р. о. $g = T[f]$, если его рассматривать только на J, допускает следующее представление: $g(x) = b(\mu t(f \in \delta^{a(x,t)}))$, где a и b — примитивно-рекурсивные функции.

Теорема 2. Для существования такого ч.-р. о. T, что $O_T = M$, необходимо и достаточно, чтобы множество M было эфф. G_δ.

Теорема 3 (первое утверждение). Всякий ч.-р. о. осуществляет эфф. непрерывное отображение своей области общеопределенности.

Теорема 5. Если T — ч. р. о., то на всяком эфф. замкнутом $M \subseteq O_T$ он является о. р. о. (определение см. РЖМат, 1956, 4282).

Теорема 5′. Если T — ч.-р. о., то на всяком эфф. компакте $M \subseteq O_T$ он является постовским (определение см. там же).

Оператор $g = T[f]$ называется функционалом, если для каждой функции f функция g^* есть либо константа, либо нигде не определенная функция.

Теорема 2′. Для существования такого ч.-р. функционала Φ, что $O_\Phi = M$, необходимо и достаточно, чтобы множество M было эфф. открытым.

Опечатка: стр. 898, строка 6-я снизу. Вместо $R[F]$ надо $R[f]$. В. А. Успенский

8531. Некоторый пример неразрешимой проблемы теории групп. Бун (Certain simple, unsolvable problems of group theory. Boone William W.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 3, 231—237; № 5, 492—497; 1955, **A58**, № 2, 252—256; № 5, 571—577; Indagationes math., 1954, **16**, № 3, 231—237; № 5, 492—497; 1955, **17**, № 2, 252—256; № 5, 571—577 (англ.)

Работа состоит из четырех частей. В I части ставится некоторая проблема (quasi-Magnus problem), аналогичная известной проблеме тождества теории групп.

Квази-Магнус проблемой называется следующая проблема: пусть группа G_T задана конечным числом определяющих соотношений и образующих $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и пусть фиксировано некоторое подмножество $q_1, q_2, \ldots, q_m$ $(0 < m < n)$ образующих G_T. Требуется построить алгоритм, определяющий для любого слова w из G_T, равно оно в G_T какому-нибудь слову, составленному только из положительных степеней букв $q_1, q_2, \ldots, q_m$, или нет. Автор указывает, что если в определении квази-Магнус проблемы убрать условие: «только из положительных степеней», то получим проблему, эквивалентную проблеме тождества теории групп. Тюрингом построена машина Тюринга, для которой невозможен алгоритм, определяющий по каждой начальной полной конфигурации (initial C. C.) машины, вступит она в процессе работы в определенную внутреннюю конфигурацию или нет. На основе этой машины в первой части работы строится группа G_T с конечным числом образующих и определяющих соотношений. II, III и IV части посвящены доказательству того факта, что в построенной группе G_T для определенного подмножества образующих квази-Магнус проблема неразрешима. При доказательстве используются результаты А. И. Мальцева (Матем. сб., 1939, 6(48), 331—336; 1940, 8(50) 251—264). В IV части (стр. 571) указываются некоторые опечатки, допущенные в первых трех частях.

Примечание референта. По-видимому, автору неизвестно, что П. С. Новиковым еще в 1952 г. опубликовано окончательное решение проблемы тождества теории групп (Докл. АН СССР, 1952, 85, № 4, 709—712). С. И. Адян

8532. Доказательство Гёделя. Нагель, Ньюман (Gödel's proof. Nagel Ernest, Newman James R.), Scient. Amer., 1956, **194**, № 6, 71—84, 86 (англ.)

Популярная статья об открытиях Гёделя о неполноте формальных систем и о значении этих открытий. Прилагается фотография Гёделя и краткие сведения о его жизни (Гёдель родился в Чехословакии в 1906 г.). А. С. Есенин-Вольпин

8533. Способ упрощения функций истинности. Куайн (A way to simplify truth functions. Quine W. V.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 9, 627—631 (англ.)

Конъюнкция переменных и отрицаний переменных, в которой каждое переменное встречается не более одного раза, называется элементарной. Выражение вида $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_m$ называется дизъюнктивной нормальной формой (д. н. ф.), если каждое слагаемое $\mathfrak{A}_i$ является элементарной конъюнкцией. В работе изучается вопрос о нахождении простейших реализаций функций алгебры логики в классе д. н. ф., в том числе и минимальных д. н. ф., т. е. д. н. ф., содержащих наименьшее число букв.

Элементарная конъюнкция $\mathfrak{A}$ поглощает (subsumes) элементарную конъюнкцию $\mathfrak{B}$, если $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \equiv u$. Элементарная конъюнкция $\mathfrak{A}$ называется простой импликантой формулы Φ, если $(\mathfrak{A} \to \Phi) \equiv u$ и $\mathfrak{A}$ не поглощает никакой более короткой элементарной конъюнкции $\mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{B} \to \Phi) \equiv u$. Кокъюнкция $\Phi\&\Psi$ (не содержащая повторений букв) называется консенсусом двух элементарных конъюнкций $\mathfrak{A} = \alpha\&\Phi$ и $\mathfrak{B} = \bar{\alpha}\&\Psi$, если не существует переменной, входящей в нее как с отрицанием, так и без отрицания. Д. н. ф., состоящую из всех простых импликант формулы Φ, мы назовем сокращенной д. н. ф.

Автором устанавливается следующий факт: каждая д. н. ф. Φ может быть эквивалентным образом преобразована в соответствующую сокращенную д. н. ф. путем применения следующих операций:

(1) Опускание в д. н. ф. конъюнкции, поглощающей другую конъюнкцию, а также замена $\alpha \vee \bar{\alpha}\Phi$ на $\alpha \vee \Phi$ (соответственно $\bar{\alpha} \vee \alpha\Phi$ на $\bar{\alpha} \vee \Phi$), где α — переменное.

(2) Присоединение в виде слагаемого к д. н. ф. консенсуса двух конъюнкций, принадлежащих к этой д. н. ф. Последняя операция считается неприменимой, если консенсус поглощается некоторой конъюнкцией из д. н. ф.

При этом сначала применяется операция (1) до тех пор пока возможно, затем операция (2), потом опять операция (1) до тех пор пока возможно, далее операция (2) и т. д.

Автор отмечает, что после того, как данная статья была сдана в печать, ему стало известно, что сформулированный выше результат был высказан Э. Сэмсоном и Б. Милзом еще в 1954 г. (Samson Edward W., Mills Burton E., Circuit minimization: algebra and algorithms for new Boolean canonical expressions», AFCRC Technical Report 54—21, Apr. 1954).

В конце сообщаются приемы, которые указывают, в каком порядке следует опускать в сокращенной д. н. ф. поглощаемые (лишние) члены, чтобы получить минимальную д. н. ф. С. В. Яблонский

8534. Теорема Гёделя для бесконечнозначного расширенного исчисления высказываний. Роз (A Gödel theorem for an infinite-valued erweiterter Aussagenkalkül. Rose Alan), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, **1**, № 2, 89—90 (англ.)

В работе, используя метод, аналогичный тому, который был употреблен Гёделем, доказывается, что не существует правдоподобной и полной формализации некоторого бесконечнозначного расширенного исчисления высказываний. Указанный факт был кратко изложен автором в «Proc Internat. Congr. Math.», 1954, 2, Amsterdam, 1954, 406—407 (см. также РЖМат, 1956, 1920). С. В. Яблонский

8535. О некоторых операторах над классами отношений. Франсе (Sur certains opérateurs dans les classes de relations. Fraïssé Roland), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 22, 2109—2110 (франц.)

Одна из многочисленных работ автора по теории отношений. Рассматриваются m-местные отношения (РЖМат, 1956, 3597) и некоторые операторы над классами этих отношений. Классифицируются изоморфизмы m-отношений, определенные на конечных частях исходных баз, по их продолжаемости на более обширные части исходных баз и вводятся понятия $\gamma = \{{n \atop p}\}$-изоморфизма, γ-родства между m-отношениями и γ-оператора. Приводятся без доказательства некоторые свойства γ-операторов. Автор обещает дать приложение введенных операторов. Ю. А. Шиханович

8536. Конструирование γ-операторов и их приложение к узкому исчислению предикатов. Франсе (La construction des γ-opérateurs et leur application au calcul logique du premier ordre. Fraïssé Ro-

l a n d), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 23, 2191—2193 (франц.)

Дается конструктивное определение γ-операторов (реф. 8535): они строятся, исходя из нескольких простейших, выбранных из них, при помощи двух операций. Полученное конструктивное определение позволяет дать новое определение γ-родства двух m-отношений и установить связь между утверждениями алгебры отношений и утверждениями узкого исчисления предикатов. Теоремы даются без доказательств.

Ю. А. Шиханович

8537. Упрощенные основания для математической логики. С т э н л и (Simplified foundations for mathematical logic. S t a n l e y R o b e r t L.), J. Symbolic Logic, 1953, 20, № 2, 123-139 (англ.)

Строится новая система SF (Simplified Foundations — «упрощенные основания»), которая не слабее, чем NF (New Foundations) Куайна. Доказывается, что из непротиворечивости NF следует непротиворечивость SF.

Символизм SF таков: термами служат переменные ‚x', 'y', 'z'', 'y'',..., обозначаемые 'α', 'β', 'γ', 'δ', ‚α'', . . . , и абстракты, имеющие вид $\ulcorner(\zeta / \alpha / \eta)\urcorner$, что означает $\ulcorner$класс α, для которых ζ ‚не пересекается с $\eta\urcorner$, или формально $\ulcorner\hat{\alpha}(\beta) \sim (\beta \in \zeta.\ \beta \in \eta)\urcorner$ ('ζ', 'η', 'θ', 'ζ'', . . . обозначают термы; термы ζ, η могут содержать α). Формулы обозначаются посредством φ', 'ψ', 'χ', 'φ'', . . .

Пусть α — самая ранняя в алфавите переменная, не входящая ни в ζ, ни в η. Тогда $\ulcorner(\zeta/\eta)\urcorner$ означает, по определению, $\ulcorner(\zeta/\alpha/\eta)\urcorner$; между формулами / есть обычный штрих Шеффера, через который, как обычно, определяются классические пропозициональные связки. $\ulcorner(\alpha)\varphi\urcorner$ определяется как $\ulcorner((\varphi/\alpha/\varphi)/(\varphi/\alpha/\varphi))\urcorner$, $\ulcorner\exists\alpha\urcorner$ как $\ulcorner\sim(\alpha)\sim\urcorner$, $\ulcorner\alpha\varphi\urcorner$ как $\ulcorner((\varphi/\varphi)/\alpha/(\varphi/\varphi))\urcorner$, $\ulcorner(\zeta \subset \eta)\urcorner$ как $\ulcorner(\alpha)\ (\alpha/\eta .\supset. \alpha/\zeta)\urcorner$, $\ulcorner\zeta = \eta\urcorner$ как $\ulcorner((\zeta \subset \eta) . (\eta \subset \zeta))\urcorner$, $\ulcorner\iota\zeta\urcorner$ как $\ulcorner\hat{\alpha}(\alpha = \zeta)\urcorner$, $\ulcorner(\zeta \in \eta)$ как $\ulcorner(\iota\zeta \subset \eta)\urcorner$.

Вхождение $\ulcorner/\alpha/\urcorner$ в $\ulcorner(\zeta/\alpha/\eta)\urcorner$ называется абстрактором; говорят, что абстрактор $\ulcorner/\alpha/\urcorner$ показывает каждую часть этого вхождения $\ulcorner(\zeta/\alpha/\eta)\urcorner$ и связывает каждое вхождение α в $\ulcorner(\zeta/\alpha/\eta)\urcorner$, не связанное никаким другим вхождением абстрактора. Остальные вхождения α называются свободными. Вхождение η в ζ называется свободным в ζ, если все вхождения переменных в η, свободные в η, являются свободными и в ζ.

Терм ζ называется выпрямимым (stratified), если каждому вхождению терма в ζ можно приписать цифру таким образом, что 1) если k приписана какому-либо вхождению $\ulcorner(\eta/\alpha/\theta)\urcorner$, то каждому свободному вхождению α в эти вхождения η и θ приписывается $k-1$, 2) k приписана вхождению η в $\ulcorner(\eta/\alpha/\theta)\urcorner$ в том и только в том случае, если и вхождению θ в это $\ulcorner(\eta/\alpha/\theta)\urcorner$ также приписана k, и 3) всем свободным вхождениям в ζ любой данной переменной приписана одна и та же цифра.

Энъюнкцией называется ряд применений конъюнкций и дизъюнкций в каком-то порядке. ζ^n_θ означает результат подстановки η вместо свободных вхождений θ в ζ. $\ulcorner(\zeta e \alpha)\urcorner$ означает то же, что и $\ulcorner(\zeta \in \alpha)\urcorner$, а $\ulcorner(\zeta e\ (\eta/\alpha/\theta))\urcorner$ означает $\ulcorner(\eta^\zeta_\alpha/\theta^\zeta_\alpha)\urcorner$.

Правила образования:

FR. Вхождение члена энъюнкции $\ulcorner(\zeta/\eta)\urcorner$ можно заменить на вхождение $\ulcorner(\theta \tilde{e} \zeta .\vee. \theta \tilde{e} \eta)\urcorner$, где θ — выпрямима. FR $\sim$. Вхождение члена энъюнкции $\ulcorner\sim(\zeta/n)\urcorner$ можно заменить на $\ulcorner(\alpha e \zeta .\alpha e \eta)\urcorner$, где α — новая переменная (т. е. не входящая в это вхождение $\ulcorner\sim(\zeta/\eta)\urcorner$ и части, из которых оно получилось). FRM. Переход от φ к $\ulcorner(\varphi.(\psi \vee \sim\psi))\urcorner$.

Нелепостью называется: 1) конъюнкция φ, содержащая члены ψ и $\ulcorner\sim\psi\urcorner$; 2) дизъюнкция нелепостей; 3) энъюнкция, которую можно привести к нелепости путем распределения вхождений '.' по '$\vee$'. Единственный принцип, позволяющий устанавливать теоремы, гласит:

Р. Если φ не имеет свободных переменных и $\ulcorner\sim\varphi\urcorner$ можно привести к нелепости посредством правил FR, FR $\sim$ и FRM, то φ — теорема.

Отметим следующую небрежность: $\ulcorner\theta \tilde{e} \zeta\urcorner$ в FR (стр. 126) не было определено, по-видимому, под этим следует понимать $\ulcorner\sim\theta e \zeta\urcorner$.

Примечание референта. Термин «выпрямимый» не является переводом английского термина «stratified», что лучше было бы перевести как «расслояемый». Тем не менее, мы продолжаем здесь пользоваться этим термином, который был введен нами в РЖМат, 1954, 4328; 1955, 5921 и др.

А. С. Есенин-Вольпин

См. также: 8665

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

8538. Обратные задачи аддитивной теории чисел. Фрейман Г. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 14, 109—115

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots \qquad (1)$$

— монотонно и неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Обозначим через $q(N)$ число решений неравенства

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots \leqslant N.$$

Рассматривается задача определения последовательности (1) по заданной функции $q(N)$. Находятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы имела место асимптотическая формула

$$\log q(u) \sim A u^\alpha (\log u)^{-\beta},$$

где $A>0$, $0<\alpha<1$, β — любое действительное число. Указываются возможные применения полученных результатов в статистической термодинамике.

Г. В. Емельянов

8539. К проблеме Варинга для алгебраических чисел и полиномов. Ригер (Zum Waringschen Problem für algebraische Zahlen und Polynome. R i e g e r G. J.), J. reine und angew. Math., 1956, 195, № 1—2, 108—120 (нем.)

Оценивается элементарно число слагаемых в двух

теоремах, доказанных Камке (Kamke, Math. Ann., 1922, 87, 238—245; РЖМат, 1954, 5039). В. И.Нечаев

8540. Проблема k-адического представления целых положительных чисел. Чжоу Бо-сюань, Янь Ши-цзянь (關於 k 進表示法的一個問題. 周伯壎, 嚴士健), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1955, 5, № 4, 433—438 (кит.; рез. англ.)

Пусть k — фиксированное натуральное число. Любое натуральное число x единственным образом представимо в форме

$$x = a_1 k^{n_1} + a_2 k^{n_2} + \ldots + a_t k^{n_t},$$

где $n_1 > n_2 > \ldots > n_t \geqslant 0$, $0 \leqslant a_i^* \leqslant k-1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, a_i, $n_1, \ldots, n_t$ — все целые числа. Положим

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{t} a_i, \quad A(x) = \sum_{y \leqslant x} \alpha(y).$$

Доказываются:

Теорема 1.

$$A(x) = 2^{-1}(k-1)\, x \log x \log^{-1} k + O(x).$$

Пусть m — любое фиксированное натуральное число. Тогда:

Теорема 2. Число $B_m(x)$ решений (в целых положительных числах) уравнения $\alpha(y) = m$ выражается асимптотической формулой

$$B_m(x) \sim (1/m!)\,(\log x \log^{-1} k)^m.$$

Г. В. Фмельянов

8541. Оценка плотностей суммарных множеств. Каш (Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Kasch Friedrich), II Mitt. Math. Z., 1956, 64, № 3, 243—257 (нем.)

Автор, занимаясь одной проблемой Эрдёша, дал улучшение существующих оценок плотностей суммарных множеств натуральных чисел (РЖМат, 1956, 2730).

Исходя из обобщений своих, так называемых основных, формул и следуя тому же методу, автор получает улучшение своих последних оценок конечной и асимптотической плотностей.

В частности, доказывается, что для каждого λ существует такой интервал $0 < \alpha < \alpha_\gamma$, в котором имеет место более точная оценка, чем та, которая требуется в проблеме Эрдёша

$$\gamma \geqslant \alpha(1 + (1-\alpha)/\lambda)$$

(α — конечная плотность множества $\mathfrak{A}$, λ — средний порядок множества $\mathfrak{B}$, а γ — конечная плотность суммарного множества $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$)

Исследуется аналогичный вопрос для множеств целых точек r-мерного пространства, именно получается обобщение известного неравенства Эрдёша-Ландау.

П. Г. Когония

8542. О плотности некоторых последовательностей целых чисел. Реньи (On the density of certain sequences of integers. Rényi Alfred), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 157—162 (англ.)

Обозначим через $U(n)$ число различных простых делителей, а через $V(n)$ число всех простых делителей натурального n. Пусть k — неотрицательное целое число, $N_k(x)$ — число натуральных $n \leqslant x$, для которых $V(n) - U(n) = k$. Доказывается, что для любого k существует плотность $d_k = \lim_{x \to \infty} N_k(x)/x$ и для $|z| < 2$ имеет место тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k = \prod_p (1 - 1/p)\{1 + 1/(p-z)\},$$

где произведение берется по всем простым p. Отсюда, в частности, следует, что для больших k $d_k \sim 2^{-k-2} \prod_{p>2} (p-1)^2/\{p(p-2)\}$. Доказательство проведено элементарным комбинаторным методом.

Опечатка: в формуле (3) множитель $1 + 1/p$ нужно заменить на $1 - 1/p$. И. П. Кубилюс

8543. Замечание к предыдущей статье А. Реньи. Кац (A remark on the preceding paper by A. Rényi. Kac M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 163—165 (англ.)

Дается другое доказательство тождества Реньи (реф. 8542), основанное на следующем замечании. Для всех простых p определим теоретико-числовые функции $\alpha_p(n)$ из равенства $n = \prod p^{\alpha_p(n)}$, где произведение берется по всем простым p. Тогда для любого набора простых $p_1, \ldots, p_r$ ($p_i \neq p_j$ при $i \neq j$) и любых целых неотрицательных $k_1, \ldots, k_r$

$$D\{\alpha_{p_1}(n) = k_1, \ldots, \alpha_{p_r}(n) = k_r\} = \prod_{s=1}^{r} D\{\alpha_{p_s} = k_s\},$$

где $D\{\ldots\}$ означает плотность множества натуральных n, удовлетворяющих условиям, указанным в скобках. Поэтому функции $\alpha_p(n)$ можно рассматривать как независимые случайные величины. Доказательство тождества Реньи сводится тогда к некоторой теоретико-вероятностной задаче. Основная трудность, которую приходится при этом преодолеть, состоит в том, что плотность является лишь конечно-аддитивной мерой.

И. П. Кубилюс

8544. О модулярных функциях и некоторых аддитивных задачах. Петерссон (Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme. Petersson Hans. Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. Kl. Math. und allgem. Naturwiss., 1954, № 2, 59 S.) (нем.)

Разработанный Харди и Литлвудом аналитический метод решения аддитивных задач основан на разбиении пути интегрирования на так называемые «большие и малые дуги». В реферируемой работе подробно излагается другой аналитический метод решения аддитивных задач, основанный на функциональном исследовании модулярных форм. Рассматриваются следующие типы аддитивных задач. Пусть множество натуральных чисел разбито на непересекающиеся классы $S_1, \ldots, S_h$, причем каждому $g = 1, \ldots, h$ соответствует целое число $k_g \geqslant 0$, $K = \sum_{g=1}^{h} k_g > 0$. Рассмотрим представление натурального n в виде суммы слагаемых, причем слагаемые из S_g могут появиться в k_g различных экземплярах. Классы S_g определяются с помощью сравнений. Характерный пример можно указать следующий. Пусть N — дискриминант вещественного квадратичного поля $\mathfrak{k}$. Рассмотрим два класса. К первому классу S^+ принадлежат все m, для которых $(N/m) = 1$, ко второму классу S^- принадлежат все m, для которых $(N/m) = -1$. Обозначим соответственно через $\pi_n^+(k, N)$ ($\pi_n^-(k, N)$) число представлений n в виде суммы k слагаемых из S^+ (S^-). Имеет место следующее соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \pi_n^+(k, N)/\pi_n^-(k, N) = \varepsilon^{kh},$$

где $\varepsilon > 1$ — основная единица поля $\mathfrak{k}$, а h — число классов.

В реферируемой работе установлено много результатов такого типа. В конце статьи исследуется вопрос о влиянии на асимптотическую формулу для числа представлений изменения одного слагаемого.

И. И Пятецкий-Шапиро

8545. **О преобразованиях $\ln\eta(\tau)$.** Радемахер (On the transformation of $\ln\eta(\tau)$ Rademacher Hans), J. Indian Math. Soc., 1955, **19**, № 1, 25—30 (англ.)

Указывается, что Зигелем недавно было дано очень простое доказательство соотношения

$$\ln\eta(-1/\tau) = 2^{-1}\ln\tau + \ln\eta(\tau),$$

где

$$\eta(\tau) = \exp(\pi i\tau/12)\ \prod_{m=1}^{\infty}(1-\exp(2\pi i m\tau)),\ \mathrm{Im}\ \tau > 0.$$

Доказано, что

$$\ln\eta(\tau') = \ln\eta(\tau) + 2^{-1}\ln z + \pi i\,(h'-h)/12k + \pi i s(h,k),$$

где $\tau = (h+iz)/k$, $\tau' = (h'+iz^{-1})/k$, h, h', k — целые числа, $hh' \equiv -1 \pmod k$.

$$s(h,k) = \sum_{\mu=1}^{k-1}(\mu/k - 2^{-1})(\mu h/k - [\mu h/k] - 2^{-1}).$$

Для доказательства этого соотношения автор вычисляет с помощью теоремы о вычетах контурный интеграл $\int_C F_n(x)\,dx$,

$$F_n(x) = -\frac{1}{4ix}\coth\pi Nx\cot\frac{\pi Nx}{z} + \sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{1}{x}\frac{\exp(2\pi\mu Nx/k)}{[1-\exp(2\pi Nx)]}\frac{\exp(-2\pi i\mu^* Nx/kz)}{[1-\exp(-2\pi i Nx/z)}$$

$$N = n + {}^1/_2,\ \mu^* \equiv h\mu \pmod k,\ 1 \leqslant \mu^* \leqslant k-1,$$

где C — параллелограмм с вершинами z, i, $-z$, $-i$. Далее используется, что при $n\to\infty$

$$\int_C F_n(x)\,dx \to \ln z.$$

И. И. Пятецкий-Шапиро

8546. **Обобщение тождеств для коэффициентов некоторой модулярной формы.** Ньюман (Generalisations of identities for the coeffici ents of certain modular forms. Newman Morris), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 205—208 (англ.)

Если n — неотрицательное целое, то определяем $P_r(n)$ как коэффициент от x^n в $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^r$, в противном случае определяем $P_r(n)$ как 0.

Доказывается:

Теорема 1. Пусть r — четное, $0 < r \leqslant 24$; p — простое > 3 такое, что $r(p-1)/24 = \Delta$ — целое; Q — степень p и $\delta = r(Q-1)/24$. Тогда для всех целых n

$$P_r(nQ+\delta) = P_r(\delta)P_r(n) - p^{r/2-1}P_r((\delta-\Delta)p^{-1})P_r((n-\Delta)p^{-1}).$$

Теорема 2. Пусть r — одно из чисел 2,4,6,8,10,14,26; p — простое > 3 такое, что $r(p+1) \equiv 0 \pmod{24}$; $\Delta = r(p^2-1)/24$; Q — нечетная степень p и $\delta = r(pQ-1)/24$. Тогда для всех целых n

$$P_r(nQ+\delta) = (-p)^{r/2-1}P_r((\delta-\Delta)/p^2)P_r(n/p).$$

Эти теоремы являются обобщением более ранних теорем автора (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 313—320; РЖМат, 1954, 2501; 1956, 3617) и получаются из них с помощью индукции. Г. А. Ломадзе

8547. **Улучшение остаточного члена при элементарном доказательстве закона простых чисел.** Кун (Eine Verbesserung des Restgliedes beim elementaren Beweis des Primzahlsatzes. Kuhn P.), Math scand., 1955, **3**, № 1, 75—89 (нем.)

Присоединяя к методу Сельберга (Selberg A., Ann. Math., 1949, 2 ser., **50**, № 2, 305—313) новые идеи, автор дает элементарные доказательства закона простых чисел в форме

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leqslant x}\log p = x + O(x\log^{-c}x),$$

где $c = 1/10$. Это является улучшением по сравнению с известными до сих пор элементарными доказательствами Сельберга и Эрдеша, где для остаточного члена вместо $O(x\log^{-c}x)$ было получено $o(x)$.

Пусть $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $\psi(x) = \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \cdots$. Главную часть рассуждений составляет доказательство теоремы:

Пусть $N^2 \leqslant L$, $L^2 \leqslant x$, $\beta(N) \leqslant 0{,}11$. Если $|R(\eta)| \leqslant \beta(N)\eta$ при всяком $\eta \geqslant N$, то

$$x^{-1}\left|\sum_{N<n\leqslant L}(\Lambda(n)-1)R(xn^{-1})\right| \leqslant 0{,}75\,\beta(N)(1+\beta(N))\log(LN^{-1}) + O(\log L\log^{-1/3}N).$$

И. В. Чулановский

8548. **Об одной проблеме нелинейных диофантовых приближений.** Куджани (Sopra una questione di approximazione diofantea non lineare. Cugliani Marco), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 489—497 (итал.)

Изучается множество $I(\alpha)$ точек с абсциссами $p^2 - q^2\alpha$, где α — фиксированное положительное иррациональное число, тогда как p и q пробегают независимо друг от друга множество целых чисел. Г. А. Ломадзе

8549. **Об одной проблеме диофантовых приближений.** Декомб (Sur un problème d'approximation diophantienne. Descombes Roger), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 13, 1669—1672 (франц.)

Пусть ξ — действительное иррациональное и η — любое действительное число. С помощью алгорифма, идея которого принадлежит Касселсу (РЖМат, 1955, 603), и аналогично алгорифму непрерывных дробей, изучается множество значений

$$c(\xi,\eta) = \overline{\lim_{u,v}}\,1/v\,|v\xi - u - \eta|$$

(u, v — произвольные целые, $v > 0$). Г. А. Ломадзе

8550. **Об одной проблеме диофантовых приближений.** Декомб (Sur un problème d'approximation diophantienne. Descombes Roger), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 14, 1782—1784 (франц.)

Найдена наименьшая точка сгущения множества значений чисел $c(\xi,\eta)$, введенных в предыдущей заметке (реф. 8549), и бесконечное множество значений, предшествующих этой точке, среди которых лишь первые два были известны ранее. Г. А. Ломадзе

8551. **Рациональные приближения в комплексной плоскости (II).** Чок (Rational approximation in the complex plane (II). Chalk J. H. H.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 216—221 (англ.)

Пусть $f(u,v) = (\alpha u + \beta v)(\gamma u + \delta v)$ — бинарная квадратичная форма от переменных u, v с комплексными коэффициентами, причем $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Пользуясь ранее изложенным методом (РЖМат, 1956, 2742), автор доказывает теорему:

Для любых комплексных чисел u_0, v_0 существуют гауссовы целые числа u, v, удовлетворяющие неравенству

$$|f(u+u_0, v+v_0)| \leqslant |\Delta|/2. \qquad (1)$$

Строгое неравенство выполняется в случае

$$f(u+u_0, v+v_0) \neq \lambda(au+bv+g+(1+i)/2)\times(cu+dv+h+(1+i)/2),$$

где a, b, c, d, g, h — гауссовы целые числа, $|ad-bc|=1$. Если $\alpha/\beta \in K(i)$, то для любого $\varepsilon>0$ существует решение (1) такое, что $|\alpha(u+u_0)+\beta(v+v_0)|<\varepsilon$.

Э. Е. Симакова

8552. Новая оценка критического определителя лучевого тела. Шмидт (Eine neue Abschätzung der kritischen Determinante von Sternkörpern. Schmidt W.), Monatsh. Math., 1956, 60, № 1, 1—10 (нем.)

Пусть S — замкнутое лучевое тело в n-мерном евклидовом пространстве R^n, ограниченное, симметричное относительно начала; $V(S)$ — жорданов объем S. Пусть Γ — решетка точек определителя $d(\Gamma)$. Называем решетку Γ допустимой для S, если единственная внутренняя точка S, общая с Γ, есть начало. Пусть $\Delta(S)$ — критический определитель S, т. е. нижняя граница $d(\Gamma)$ по всем допустимым для S решеткам Γ. Обозначим

$$Q(S)=V(S)/\Delta(S). \tag{1}$$

Главка (Hlawka E., Math. Z., 1943, 49, 285—312) доказал, что

$$Q(S)\geqslant 2\zeta(n),\ \zeta(n)=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots, \tag{2}$$

подтвердив тем самым известное утверждение Минковского.

В статье дается некоторое усиление (для $n>2$) оценки (2). Именно, доказывается теорема: Пусть $p_0=1$, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, ... — последовательные простые числа; определим числа a_k, b_k $(k=1, 2, \ldots)$ по индукции:

$a_0=1$, $a_k=a_{k-1}+1/(2\cdot 3\cdot 5\cdots p_k)$, $a=\lim_{k\to\infty}a_k=1{,}7090\ldots$, $b_0=1$, $b_k=(b_0+b_1+\cdots+b_{k-1})(p_k-1)+1$; тогда для любого целого $k\geqslant 0$

$$Q(S)\geqslant 2\zeta(n)\,a_k/\sum_{j=0}^{k}(b_j/p_j^n).$$

В частности, для $k=0$ получается теорема Главка; для $k=1$

$$Q(S)\geqslant[3/(1+1/2^{n-1})]\,\zeta(n).$$

Вообще, $Q(S)\geqslant k(n)$, где $k(n)\sim 2a$ при $n\to\infty$.

А. В. Малышев

8553. Теорема переноса геометрии чисел. Берч (A transference theorem of the geometry of numbers. Birch B. J.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 248—251 (англ.)

Пусть A — ограниченное замкнутое выпуклое тело в n-мерном евклидовом пространстве R^n с центром в начале координат. Пусть его объем V. Пусть λ_1 и Λ суть соответственно «однородный» и «неоднородный» минимумы тела A по отношению к решетке целых точек I^n, так что λ_1 есть верхняя граница тех t, для которых тела tA с центрами в точках решетки I^n не пересекаются, в то время как Λ есть нижняя граница тех t, для которых тела tA с центрами во всех точках решетки I^n покрывают все пространство R^n. Обозначим $(\lambda_1/2)^{-n}V^{-1}=Q$. По теореме Минковского о выпуклом теле $Q\geqslant 1$. Кнезер (РЖМат, 1956, 150) доказал, что

$$\Lambda\leqslant(\lambda_1/2)([Q]+\langle Q\rangle^{1/n}), \tag{1}$$

где $[Q]$ и $\langle Q\rangle$ суть целая и дробная части Q.

В реферируемой статье доказывается, что если

$$Q\geqslant n!, \tag{2}$$

то

$$\Lambda\leqslant\lambda_1 Q/2. \tag{3}$$

(Фактически доказан несколько более точный результат.) Приводится пример, показывающий, что оценка (3) не может быть усилена. Как отмечает автор, Кнезер заметил, что условие (2) может быть заменено более слабым: $Q\geqslant n$. В статье приведен также пример, показывающий, что для $1\leqslant Q\leqslant 2$ оценка (1) не может быть усилена.

Итак, в случае $1\leqslant Q\leqslant 2$ мы имеем неулучшаемую оценку (1), а в случае $Q\geqslant n$ — неулучшаемую оценку (3). Остается открытым вопрос, можно ли в случае $2<Q<n$ $(n>2)$ улучшить оценку (1), скажем, до (3) или какой-либо промежуточной между (1) и (3).

А. В. Малышев

8554. Аналитическое определение количества представлений натуральных чисел специальными тернарными квадратичными формами с конгруэнциальными условиями. Эбель (Analytische Bestimmung der Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen durch spezielle ternäre quadratische Formen mit Kongruenzbedingungen. Ebel Ilse), Math. Z., 1956, 64, № 2, 217—228 (нем.)

С помощью методов Петерссона (Petersson H., Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1931, 8, 215—242) ищется количество представлений натурального числа формой $Q_1=n_1^2+n_2^2+n_3^2$ при одном из следующих условий: (a) $n_1\equiv 0$, $n_2\equiv 0$, $n_3\equiv 1 \pmod 4$, (b) $n_1\equiv 1$, $n_2\equiv 2$, $n_3\equiv 2 \pmod 4$, а также формой $Q_2=3n_1^2+n_2^2+n_3^2$ при одном из следующих шести условий:

(c) $n_1\equiv 0 \pmod 2$, $n_2\equiv 0$, $n_3\equiv 1 \pmod 6$,
(d) $n_1\equiv 1 \pmod 2$, $n_2\equiv 1$, $n_3\equiv 3 \pmod 6$,
(e) $n_1\equiv 0 \pmod 2$, $n_2\equiv 2$, $n_3\equiv 3 \pmod 6$,
(f) $n_1\equiv 0 \pmod 2$, $n_2\equiv 0$, $n_3\equiv 2 \pmod 6$,
(g) $n_1\equiv 1 \pmod 2$, $n_2\equiv 0$, $n_3\equiv 1 \pmod 6$,
(h) $n_1\equiv 1 \pmod 2$, $n_2\equiv 2$, $n_3\equiv 3 \pmod 6$.

Во всех восьми случаях количество представлений выражается через тета-ряды.

А. В. Малышев

8555. Несколько замечаний об отыскании рациональных точек на некоторых алгебраических многообразиях. Сколем (Einige Bemerkungen über die Auffindung der rationalen Punkte auf gewissen algebraischen Gebilden. Skolem Th.), Math. Z., 1955, 63, № 3, 295—312 (нем.)

Высказывается ряд соображений частного характера о рациональных точках на пространственных униkурсальных кривых и на поверхностях третьего порядка. В частности, устанавливается, что если на пространственной униkурсальной кривой или на нелинейчатой поверхности третьего порядка, имеющей по крайней мере одну двойную точку, имеются обыкновенные точки с координатами из поля вещественных чисел и из p-адических полей при всех p, то имеются и обыкновенные рациональные точки.

Приводится построение всех рациональных точек на нелинейчатых поверхностях третьего порядка, имеющих одну, три или четыре двойные точки. На поверхностях с двумя двойными точками и без двойных точек дается способ построения бесконечного множества рациональных точек (в последнем случае, если имеется одна). Приводится много примеров. Д. К. Фаддеев

8556. Один класс диофантовых уравнений. Фьельстедт (On a class of diophantine equations. Fjellstedt Lars), Arkiv. mat., 1956, **3**, № 3, 223—227 (англ.)

Рассматриваются целочисленные решения уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+a_i)^2+c=xx_1x_2\ldots x_n$$

при целых a_i и c, $c>0$.

Э. Апарисио

8557. Некоторые теоремы о линейных сравнениях. Фьельстедт (Einige Sätze über lineare Kongruenzen. Fjellstedt Lars), Arkiv mat., 1956, **3**, № 3, 271—274 (нем.)

Доказывается, что число решений сравнения $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i \equiv 0 \pmod m$, удовлетворяющих условию $|x_i| \leqslant m^{1/r}$, равно $D\,(\sum_{i=1}^{r} a_i^2)^{-1/2} + O\,(m^{(r-2)/2})$, где D— «площадь» части «плоскости» $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = 0$, заключенной внутри «куба» $|x_i| \leqslant m^{1/r}$. Эта теорема затем обобщается на случай системы сравнений, в которой число сравнений менее числа неизвестных. В. Д. Подсыпанин

8558. О биномиальных числах. Курепа (Über die Binomialzahlen. Kurepa G.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1954, **2**, № 1, 9—10 (нем.)

Даны три теоремы делимости биномиальных коэффициентов с указанием, что их доказательства будут даны в другом месте.

Примечание референта. Первая теорема (с доказательством) имеется, например, в книге И. М. Виноградова «Основы теории чисел», 1949, стр. 24, задача 12. В. А. Голубев

8559. Распространение сравнения Бауэра. Карлиц (An extension of Bauer's congruence. Carlitz Leonard), Math. Nachr., 1955, **14**, № 3, 183—191 (англ.)

Хорошо известное сравнение, при p нечетном простом, $\prod_{s=1}^{p-1}(x+s) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod p$ обобщено Бауэром следующим образом.

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$, где $\mu = p^{m-1}\,(p-1)$,— взаимно простые с p числа в интервале $1, \ldots, p^m$. Тогда $\prod_{i=1}^{\mu}(x+r_i) \equiv (x^{p-1}-1)^{p^{m-1}} \pmod{p^m}$. Любельский доказал обобщение

$$\prod_{s=0}^{p^{m-1}-1}(x+sp) \equiv x^{p^{m-1}} \pmod{p^m}.$$

В статье доказывается 12 теорем, обобщающих и детализирующих указанные предложения. В. А. Голубев

8560. Заметка о простых числах вида $N=(6a+1)2^{2n-1}-1$ и $M=(6a-1)2^{2^{n-1}}-1$. Ризель (A note on the prime numbers of the forms $N=(6a+1)2^{2n-1}-1$ and $M=(6a-1)2_2^{n-1}-1$. Riesel Hans), Arkiv mat., 1956, **3**, № 3, № 3, 245—253 (англ.)

Рассматривается последовательность $u_1, u_2, \ldots$, определяемая условиями $u_{i+1} = u_i^2 - 2$ и $u_1 = (2+\sqrt{3})^h + (2-\sqrt{3})^h$. Пусть далее $l = 2n-1$, $h = 6a+1$, $2^l > a$, $n \geqslant 2$ или $l = 2n$, $h = 6a-1$, $2^l > a$, $n \geqslant 2$. Для того чтобы число $h2^l - 1$ было простым, необходимо и достаточно, чтобы $u_{l-1} \equiv 0 \pmod{h2^l - 1}$. Приводятся примеры, показывающие, что при отсутствии неравенства $2^l > a$, критерий перестает быть справедливым. Предварительное сообщение о полученных результатах было опубликовано ранее (РЖМат, 1956, 1015). В. Д. Подсыпанин

8561. О делителях чисел вида $2^p + 1$. Слободской М. И., Матем. в школе, 1953, № 1, 16—19

Даны история исследований чисел Мерсенна $2^p - 1$, теорема 1 — о виде делителей чисел $2^p - 1$ и теорема 2 — Люка (РЖМат, 1955, 4861). Изложены исследования автора по делимости чисел $2^p \pm 1$. Дано простое доказательство теоремы Эйлера — Лагранжа о делимости чисел $2^p \pm 1$ на $2p+1$ (РЖМат, 1956, 3642). Даны 3 таблицы делителей чисел $2^p \pm 1$, при этом делители во 2-й и 3-й таблицах найдены автором.

Примечание референта. Данные редакцией сведения о числах $2^p - 1$ устарели. Уже в 1952 г. найдены еще 5 простых чисел $2^p - 1$ и проверены все значения p до $p = 2281$. Опечатка: стр. 16, строка 21 сверху, напечатано $p = 464$ вместо $p = 467$. (В заглавии нужно писать $2^p \pm 1$.) В. А. Голубев

8562. О числах Мерсена, которые являются треугольными. Бровкин, Шинцель (Sur les nombres de Mersenne qui sont triangulaires. Browkin Georges, Schinzel André), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 14, 1780—1781 (франц.)

Доказывается, что уравнение $2^n - 1 = k\,(k+1)/2$ допускает всего лишь четыре целых положительных решения (n, k): (1, 1), (2,2), (4,5) и (12,90) Э. Анарисио

8563. Таблица простых чисел. Херцигонья (Le tableau des nombres premiers. Hercigonja Mira), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, **10**, № 3, 183—188 (франц.; рез. хорв.)

Рассматривается такое расположение натуральных чисел, при котором квадраты чисел находятся в одном столбце. Простые числа, принадлежащие данной квадратичной форме, лежат при этом на диагональных прямых. Если $p = (a-x)^2 + x + 1$, $x = 0, 1, \ldots, a-1$, то при $a = 2, 4, 10, 16, 40$ мы получаем прямые, заполненные только простыми числами.

Такое расположение чисел, если числа каждой строки продолжить влево до 1, вправо до ∞, удобно для исследования квадратичных многочленов $x^2 - x + a$, дающих много простых чисел. В. А. Голубев

8564. Усовершенствованные «магические» квадраты Вениамина Франклина. Анема (Perfected Benjamin Franklin magic squares. Anema Andrew S.), Math. Teacher, 1956, **49**, № 1, 35—36 (англ.)

Выдержка из большой работы автора о «панмагических» квадратах 8-го порядка. Указаны причины, по которым числовые квадраты 8-го и 16-го порядков, составленные Франклином, не были в полном смысле «магическими» Сохранив принцип Франклина для расположения первых 32 натуральных чисел, автор так разместил последующие, числа, что квадрат 8-го порядка приобрел все основные «магические свойства» и много дополнительных В том же смысле усовершенствован и «магический» квадрат 16-го порядка. Б. А. Кордемский

8565. О плоских многоугольниках в пространственной решетке. Эрхарт (Sur les polygones plans dans un réseau de l'espace. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 15, 1844—1846 (франц.)

8566. Об одной проблеме из теории кодирования. Абрам, Дримл (O jednom problému z theorie kodování. Abrham Jaromír, Driml Miloslav), Časop. pěstov. mat., 1956, **81**, № 1, 69—76 (чеш.; рез. русс., нем.)

Для пяти алфавитов (упорядоченных множеств), в каждом из которых по n элементов (букв), можно подобрать не более n^3 слов с трехместным различием (слова — элементы декартова произведения данных множеств). Эта граница не всегда достижима и достижимое число слов зависит от способа их подбора. Описан разработанный авторами метод, дающий n^2 слов с трехместным различием. Указаны условия, при выполнении которых предлагаемый способ подбора слов является оптимальным. Б. А. Кордемский

8567. Некоторая последовательность целых чисел, определяемая «решетами». Гарднер, Лазарус, Метрополис, Юлам (On certain sequences of integers defined by sieves. Gerdiner Verna, Lazarus R., Metropolis N.,

Ulam S.), Math. Mag., 1956, **29**, № 3, 117—122 (англ.)

Рассматриваются некоторые свойства последовательности целых чисел, оставшихся после некоторого процесса «просеивания». Для подсчетов употреблялась электронная счетная машина. В. А. Голубев

8568. **О развитии теории чисел в Китае. Минь Сы-хао** (數論在中國的發展情況．閔嗣鶴), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, **1**, № 2, 397—402 (кит.)

Обзорная статья об основных достижениях китайских ученых в теории чисел. Г. В. Емельянов

8569. **Обзор истории теории трансцендентных чисел. Попкен** (Un aperçu historique sur les nombres transcendants. Popken J.), Bull. Soc. math. Belgique, 1954 (1955), **7**, № 1, 71—82 (франц.)

Краткий обзор истории развития теории трансцендентных чисел.

Примечание референта. Автор разделяет заслуги в решении седьмой проблемы Гильберта между А. О. Гельфондом и Т. Шнейдером, тогда как полное решение этой проблемы впервые было опубликовано А. О. Гельфондом (Докл. АН СССР, 1 апреля 1934, **2**, 1—6). Шнейдер опубликовал вариант доказательства уже после появления в печати статьи Гельфонда (Schneider Th., J. reine und angew. Math., 8 ноября 1934, **172**, № 2, 65—69). Не отмечает автор также, что результаты Т. Шнейдера об арифметической природе некоторых постоянных, связанных с эллиптическими функциями и Абелевыми интегралами, получены путем использования им метода А. О. Гельфонда Такое указание дано, например, в книге К. Зигеля (Siegel C. L., Transcendental numbers, Princeton, 1949). Библ. 78 назв. А. Б. Шидловский

8570. **Обсуждение последней теоремы Ферма. Бекер, Элстон** (Comment on the F. L. T. round table: II. Round table on Fermat's last theorem. Becker H. W., Elston Fred G.), Math. Mag., 1956, **29**, № 3, 123—125 (англ.)

Обмен мнениями по различным вопросам элементарного подхода к решению проблемы Ферма (см. также РЖМат, 1956, 2764). Законченных результатов статья не содержит. П. Н. Реморов

8571. **Диофантовы уравнения. Уц** (Diophantine equations. Utz W. R.), Pi Mu Epsilon J., 1954, **2**, № 1, 2—10 (англ.)

8572. **О простых числах в арифметических прогрессиях. Драхлин Е. Х.,** Уч. зап. Молотовск. ун-та, 1955, **9**, № 4, 3—6

8573 К. **Арифметическая линейка для определения любого простого числа вплоть до бесконечности, его предыдущего и последующего, а также простых множителей составных чисел. Санвитале, Де-Лука** (Regolo aritmetico per la determinazione di qualsiasi numero primo sino all'infinito, del suo precedente e del suo consecutivo nonchè dei fattori primi dei numeri non primi. Sanvitale Emilio, De Luca Renato. Pescara, Tip. Abruzzese, 1954, 15 p.), Bibliogr. ital., 1955, **89**, № 649, 234 (итал.)

8574 К. **Теоретическая арифметика. Брадис В. М** М., Учпедгиз, 1954, 208 стр., 5 р. 45 к.

8575 К. **Теория чисел. Джонс** (The theory of numbers. Jones Burton Wadsworth. London, Constable, 1956, xiii, 143 pp., ill., 24 sh.), Brit., Nat. Bibliogr., 1956, № 319, 12 (англ.)

8576 Д. **Исследования по методу тригонометрических сумм И. М. Виноградова. Постников А. Г.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т. АН СССР, М., 1956

8577 Д. **Теория единиц квадратичных и эрмитовых форм. Раманатхан** (The theory of units of quadratic and hermitian forms. Ramanathan Kollaguntа G., Doct. diss., Princeton Univ., 1951), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 4, 602—603 (англ.)

8578 Д. **Анализ Фурье в числовых полях и дзета-функции Гекке. Тейт** (Fourier analysis in number fields and Hecké's zeta-functions. Tate John Torrence Jr, — Doct. diss., Princeton Univ., 1950), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 3, 427 (англ.)

См. также: 8489

АЛГЕБРА

8579 К. **Алгебра. I. Редеи** (Algebra. I. Rédei László, Budapest, Akadémiai kiadó, 1954, 642 str.) (венг.)

Существует целый ряд отличных монографий, дающих систематическое изложение абстрактной алгебры; в их ряду книга Редеи заслуживает внимания значительными усовершенствованиями не только в излагаемом материале, но и в методе самого изложения. Первый том этого рассчитанного на два тома сочинения содержит, кроме обычного материала, соответствующего первой части книги ван-дер-Вардена (изложенного здесь более подробно), также и многочисленные обобщения и новые исследования, впервые излагающиеся в учебной литературе. Характерной чертой книги является довольно обширная трактовка проблем теории чисел, составляющих как раз одну из областей применения метода абстрактной алгебры.

Характерным для метода изложения автора является стремление к возможно большей общности и систематичности. Основные факты излагаются на основе общих понятий операции и алгебраического строения и только после этого дается их конкретизация для случаев группы, кольца, поля и т. д. Книга написана в четком, тщательном стиле. Сжатость изложения нигде не мешает ясному пониманию. В книге не помещены задачи, однако изложенный абстрактный материал иллюстрируется многочисленными примерами. У читателя предполагается лишь минимум математической подготовки, так что книга доступна и начинающему; с другой стороны, и компетентный математик найдет в ней очень удобный справочник.

Глава I носит подготовительный характер и содержит необходимые для дальнейшего сведения из теории множеств. В гл. II трактуется общая теория важнейших алгебраических строений (полугруппы, группы; кольца, тела). Дается подробное исследование основных понятий и фактов, стремящееся от общего к специальному. Общая теорема о гомоморфизмах и две теоремы об изоморфизме выводятся на основе совместимых разбиений на классы. В этой главе излагается — в качестве далеко идущего обобщения классической конструкции Гамильтона — теория косого произведения Редеи, делающая возможным составление нового строения, исходя из данных. Это понятие, уже оказавшееся весьма полезным в разных исследованиях, находит здесь в первый раз изложение в учебной литературе. Следующая глава является одной из самых содержательных глав книги, выдающейся и излагаемым материа-

лом и методом изложения. В ней исследуются алгебраические строения с областью операторов. В этой главе излагается на основе понятия косого произведения шрейерова теория расширений алгебраических строений, в частности расширения групп и колец. В качестве дальнейшего применения конструкции косого произведения автор определяет нетеровское скрещенное произведение в более общем виде, чем обычно. Здесь вводятся важные в алгебре понятия прямого соединения и свободного строения, а также понятия строений, заданных порождающей системой и определяющими соотношениями. Кроме обычных понятий векторного пространства и алгебры, автор вводит и двойные векторные пространства и двойные алгебры, для которых он получает аналогичные теоремы. Эти важные понятия лежат в основе изложения в следующих параграфах, в которых трактуются мономиальные кольца, кольца многочленов, линейные отображения, полные кольца матриц, линейные группы, знакопеременные кольца, комплексные кольца, кольца кватернионов. Строится также теория определителей над коммутативным кольцом с единичным элементом.

После построенной таким образом общей теории алгебраических строений рассматривается ряд специальных вопросов. В гл. IV исследуются евклидовы кольца. Подробно разбирается и некоммутативный случай. Как самые важные частные случаи исследуются кольцо целых рациональных чисел и кольцо многочленов над телом. Приводится созданная Гурвицем теория чисел кольца целых кватернионов. В гл. V, посвященной конечным абелевым группам, центральное место занимают основная теорема и теорема Хайоша. Эта последняя доказывается значительно упрощенным методом Редеи и Селе. С этой главой тесно связана следующая глава о модулях с операторами, где на основе теории элементарных делителей доказывается основная теорема абелевых групп с конечным числом образующих над коммутативными евклидовыми кольцами. Рассматриваются системы линейных уравнений над телом; глава завершается исследованиями, касающимися ранга матриц. В гл. VII излагается теория колец многочленов от одного или нескольких неизвестных над коммутативными кольцами с единицей. После классических исследований (производная, основная теорема о симметрических многочленах, результант, дискриминант, формулы Ньютона и Варинга, интерполяция) следуют метод Кронекера для разложения многочленов над областью целостности и общий критерий неприводимости Эйзенштейна. В этой главе помещена также теорема Кронекера — Гензеля, дающая полное описание всех идеалов кольца многочленов над коммутативным евклидовым кольцом. Кроме того, исследуются кольца с единицей, порожденные одним элементом. В гл. VIII классическая теория полей Штейница излагается с точки зрения современных требований. Включена и теория конечных полей. Гл. IX посвящается упорядоченным алгебраическим строениям. После исследования расширений колец с единичным элементом доказываются теоремы Джонсона, Селе и Артин — Шрейера, дающие необходимые и достаточные условия для упорядочиваемости колец, тел и полей соответственно. В качестве важных частных случаев рассматриваются архимедовы и неархимедовы упорядоченности. Предметом гл. X служит теория нормирования. После определения понятия сходимости чисто алгебраическим путем вводятся поля действительных и комплексных чисел. Здесь же доказывается и так называемая основная теорема алгебры. После этого рассматриваются специальные нормирования и доказываются две важные теоремы Островского о всех нетривиальных нормированиях поля рациональных чисел и о совершенных полях с архимедовой нормой. Последняя гл. XI посвящена теории Галуа. После доказательства основной теоремы следует ряд приложений, в том числе приложения к случаям конечных полей и полей деления круга.

Исследуется разрешимость алгебраических уравнений в радикалах и вопрос о возможности геометрических построений. И в этой классической области автору удалось дать новые обобщения и оригинально изложить материал. Глава завершается доказательством существования нормального базиса полей Галуа.

Книга снабжена удобным предметным указателем и довольно содержательной библиографией. По сведениям референта, эта книга будет в дополненном виде издана на немецком языке. A. Kertész

8580 К. Алгебра. Том I. Соотношения эквивалентности, операции, группы, кольца, поля. Дюбрей (Algèbre. Tome I. Equivalences, opérations, groupes, anneaux, corps. Dubreil P.). 2éme éd. Paris, Gauthier-Villars, 1954, 467 p., 3900 francs) (франц.)

Различные вопросы, рассмотренные в первом издании, в этом новом издании излагаются по-современному. Рассмотрены также некоторые новые темы. Первая глава содержит теперь полное изложение теории отношений, а также новый раздел об упорядоченных множествах и структурах. Пятая глава об упорядоченных полях расширена за счет включения большого материала о проблеме вложения для полугрупп. R. E. Johnson

Перевод из Math. Revs., 1955, **16**, № 4, 328

8581 К. Группы, поля, уравнения. Цаппа (Gruppi, corpi, equazionii. 2a ed. A cura del Prof. Rodolfo Permutti. Zappa Guido. Libreria Editrice Liguori, Napoli, 1954, 312 p.) (итал.)

Сокращенное, но очень тщательное изложение основ теории групп, теории полей и теории Галуа уравнений. Значительная часть книги посвящена теории групп. В двух первых главах излагаются основные групповые понятия. В третьей изучаются структуры, ненормальные, перестановочные и произвольные максимальные цепи; доказываются теоремы Жордана — Гёльдера и Шрейера — Цассенхауза. В следующих главах рассматривается основная теорема об абелевых группах с конечным числом образующих, теоремы Силова, p-группы и излагаются некоторые результаты Ф. Холла о центральных рядах. Затем следует часть об основных свойствах колец и полей. В последней главе излагается общая теория Галуа; изложение в этой главе в основном следует идеям Артина. O. Ore

Перевод из Math. Revs., 1955, **16**, № 4, 328

8582 К. Алгебра. С использованием лекций Артина и Нётер. Ван-дер-Варден (Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von Artin E., Noether E. 4. Aufl. Vander Waerden B.L., Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1955, VIII, 292 S. ill.), Schweiz. Buch, 1955, A55, № 14, 349 (нем.)

8583 К. Введение в современную алгебру и теорию матриц. Бемонт, Болл (Introduction to modern algebra and matrix theory. Beaumont Ross A., Ball Richard W. New York., Rinehart and Co., Inc., 1954, xii, 331, pp., 6.00 doll.) (англ.)

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 210

8584 К. Алгебра, Куросу (代數學. 黑須康之介等.共立出版, 223 頁, 300 圓, Кёрицу сюппан, 1954, 223 стр., 300 иен.) (япон.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

8585. О степенных суммах. Перрон (Über Potenzsummen. Perron Oskar), Math. Z., 1956, 64, № 1, 103—114 (нем.)

Какея (Kakeya S., Japan J. Math., 1925, **2**, 69—80; 1927, **4**, 77—85) доказал, что основные симметрические

многочлены $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда рационально выражаются через степенные суммы $s_{\nu_i} = x_1^{\nu_i} + \ldots + x_n^{\nu_i}$ (ν_i — натуральное число; $i = 1, \ldots, n$), когда множество, полученное вычеркиванием из натурального ряда чисел $\nu_1, \ldots \nu_n$, является аддитивной полугруппой. Условия теоремы Какея выполняются, в частности, если $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — первые натуральные числа, не делящие фиксированное натуральное число k. Этот частный случай был рассмотрен Валеном (Vahlen K. Th., Acta math., 1900, **23**, 91—120). Автор считает, что доказательства Какея и Валена не дают возможности эффективно выразить многочлены σ_i ($i = 1, \ldots, n$) через суммы s_{ν_i}.

В реферируемой заметке для случая Валена строится система линейных уравнений относительно $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, коэффициентами которой являются некоторые многочлены от $s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}$.

В своей предыдущей заметке (РЖМат, 1956, 5085) автор рассматривал случай степенных сумм $s_1, s_3, \ldots$ $\ldots s_{2^n-1}^n$. Он отмечает, что тогда ему были неизвестны работы ряда авторов, посвященные рассматриваемому вопросу. С. Д. Берман

8586. Заметка о квадратных многочленах. Новак (Poznámka ke kvadratickým polynomům. Novák Břetislav), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 4, 486—487 (чеш.)

Доказано, что многочлен $ax^2 + bx + c$ принимает для всех целых x значения вида $6m \pm 1$ (m — целое число) тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев: $a = 3k$ (соотв. $a = 3k + 2$); $a + b = 6l$, $c = 6n + 1$, $a = 3k + 1$ (соотв. $a = 3k + 2$); $a + b = 6l + 4$, $c = 6n + 1$, $a = 3k$ (соотв. $a = 3k + 1$); $a + b = 6l$, $c = 6n - 1$, $a = 3k + 2$ (соотв. $a = 3k + 1$); $a + b = 6l + 2$, $c = 6n - 1$ (k, l, n — целые числа). Замечено, что много значений таких многочленов в большинстве случаев являются простыми числами. J. Mařík

8587. Решение квадратных уравнений с помощью гиперболических функций. Порсе (Solution of the quadratic by hyperbolic functions. Porges Arthur), School Sci. and Math., 1955, 55, № 9, 683—684 (англ.)

8588. Значение основной теоремы алгебры. Хуан Синь-юэ (代數基本定理的意義. 胡新月), 數學通訊, Шусюэ тунсюнь, 1955, № 52, 1—7 (кит.)

Излагается доказательство основной теоремы алгебры на основании теории расширения полей. Лю Шао-сюэ

8589. О числе вещественных корней случайного алгебраического уравнения. Эрдёш, Оффорд (On the number of real roots of a random algebraic equation. Erdös Paul, Offord A. C.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 21, 139—160 (англ.)

Рассматриваются уравнения вида

$$1 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \ldots + \varepsilon_m x^m = 0$$

коэффициенты ε_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) которых принимают значения ± 1. Доказано, что для большинства этих уравнений число вещественных корней равно $\frac{2}{\pi} \ln m +$ $+ o\{\ln^{\frac{1}{2}} m \ln \ln m\}$. Число уравнений, не обладающих этим свойством, равно $o(\ln^{-\frac{1}{3}} \ln m)$ от общего числа уравнений. В. С. Новоселов

8590. О двух свойствах многочленов. Пародди (Sur deux propriétés des polynomes. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 5, 598—600 (франц.)

Пусть для многочлена $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_{n-1} z + a_n$ ($a_n \neq 0$) число $\sigma = \sum_{k=2}^{n} |a_k|$ больше единицы. Тогда, если $|a_1| > 2\sqrt{\sigma}$, то многочлен $f(z)$ имеет один и только один корень z, для которого $|a_1 + z| \leqslant \sqrt{\sigma}$. Если же $|a_1| > 1 + \sigma > 2\sqrt{\sigma}$, то один корень многочлена $f(z)$ удовлетворяет условиям: $|z| > 1$ и $|a_1 + z| \leqslant 1$, а остальные корни лежат в единичном круге. В. С. Новоселов

8591. О симметрических однородных суммах. Фридман (On a symmetric homogeneous sum. Freedman B.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 185—188 (англ.)

Пусть $S^n_{x_1 x_2 \ldots x_k} = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$.

Доказано, что $S^n_{x_1 x_2 \ldots x_k} = \sum_{s=1}^{k} \frac{x_s^{n+k-1}}{\prod\limits_{i \neq s} (x_s - x_i)} =$

$= \frac{w_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{w(x_1, x_2, \ldots, x_k)}$, где w — определитель Вандермонда, а w_1 получается заменой в определителе w всех x_i^{k-1} на x_i^{n+k-1}. А. И. Ширшов

8592. Неравенство Шура. Уотсон (Schur's inequality. Watson G. N.), Math. Gaz., 1955, **39**, № 329, 207—208 (англ.)

Новое доказательство неравенства Шура (РЖМат, 1955, 832) для случая $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. С. Д. Берман

8593. Пары матриц, обладающих свойством L. Н. Моцкин, Тауски (Pairs of matrices with property L. II. Motzkin T. S., Taussky Olga), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **80**, № 2, 387—401 (англ.)

Подробное изложение и некоторые обобщения результатов, опубликованных ранее без доказательств (РЖМат, 1954, 5066). Н. В. Азбелев

8594 К. Введение в матричное исчисление и его физические приложения. Пупке (Einführung in die Matrizenrechnung und ihre physikalischen Anwendungen. Pupke Herbert. Berlin, Dtsch. Verlag. Wiss., 1953, viii + 187 S.) (нем.)

Рассматриваемая книга предназначена в основном для читателей, не знакомых в полном объеме с современной теорией матриц, но встречающихся в своей деятельности с большими и трудными приложениями этой теории. Работающие в квантовой механике, в теории электрических цепей и т. д. найдут в этой книге изложение матричной алгебры, направленное на удовлетворение их запросов. Эти запросы были учтены при выборе тем и примеров. Немного более половины книги уделено изучению конечных прямоугольных и квадратных матриц.

Кроме классических, рассмотрены некоторые специальные вопросы, важные для приложений, как, например, функции от матриц, дифференцирование и интегрирование, эрмитовы и унитарные матрицы в применении к квантово-механическим приложениям и т. д. Вторая, значительно более краткая часть книги, посвящена бесконечным матрицам. Не считая некоторых свойств ограниченных матриц, она содержит в основном только определения и примеры. Последняя часть, охватывающая треть книги, содержит приложения. Электротехнические приложения (теория цепей) рассматриваются вкратце. Более подробно рассмотрены матричные формулировки задач квантовой механики. Например, детально рассмотрены гармонический ос-

циллятор, угловые моменты, теория возмущений, эффекты Штарка и Зеемана и т. д. L. Van Hove
Перевод из Math. Revs., 1955, **16**, № 3, 210

8595 К. Нормальные формы матриц. Пиккерт (Normalformen von Matrize. Pickert Günter. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. I, 1,7. Band I. Algebra und Zahlentheorie. 1. Teil B. Algebra. Heft 3, Teil I, 44—72 p. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1953, 7.50 DM) (нем.)

Как указано в примечании, настоящий обзор предназначался в качестве части В предыдущего обзора (РЖМат, 1956, 6396); однако из редакционных соображений он публикуется отдельно.

Классическими соотношениями между матрицами являются соотношения эквивалентности, подобия, конгруэнтности и ортогонального подобия. Рассматриваемый обзор следует приблизительно такому разделению тем и, кроме того, содержит раздел, посвященный характеристическим корням. Из него становится ясно, что за последние два десятилетия в рассматриваемой области возникло сравнительно немного новых идей. Развитие этого отдела алгебры в основном шло лишь по линии усовершенствования старой техники. Тем не менее вопрос о нормальных формах матриц продолжает привлекать к себе постоянное внимание, особенно в связи со стремлением к изучению матриц над, по возможности, общими кольцами. Указатель литературы достаточно полон и включает работы вплоть до 1953 г.
I. Kaplansky
Перевод из Math. Revs., 1953, **15**, № 6, 497

ГРУППЫ

8596. Об одном типе конечных нильпотентных групп с тремя классами неинвариантных сопряженных подгрупп. Трофимов П. И., Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 43—44

Доказывается, что порядок g конечной нильпотентной группы с тремя классами неинвариантных сопряженных подгрупп является произведением степеней не более чем двух различных простых чисел. Если g делится на простые числа p и q, то $g = p^{n+1}q^2$, где $n>1$. В этом случае группа порождается тремя элементами, определяющие соотношения между которыми даны.
С. Н. Черников

8597. О конечных нильпотентных группах с четырьмя классами неинвариантных сопряженных подгрупп. Трофимов П. И., Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 45—48

Найдены порядки и определяющие соотношения некоторых типов конечных нильпотентных групп с четырьмя классами неинвариантных сопряженных подгрупп.
С. Н. Черников

8598. О Π-разрешимых подгруппах конечных групп. Чунихин С. А., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 3, 377—378

Продолжение ранее опубликованной работы автора (РЖМат, 1956, 1063). Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ — некоторые композиционные блоки конечной группы G и Π — такое множество простых чисел, что среди всех различных простых делителей каждого из композиционных блоков $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ содержится не более одного простого числа из Π. Тогда утверждается, что любая подгруппа порядка $m_1 m_2 \ldots m_\nu$ группы G является Π-отделимой группой (РЖМат, 1954, 1569). Пусть далее g — порядок группы G и s — такой его делитель, что $\left(s, \frac{g}{s}\right) = 1$. Утверждается, что если среди различных простых делителей каждого композиционного блока группы G содержится не более одного простого делителя числа s, то группа G обладает по крайней мере одной разрешимой подгруппой порядка s и все подгруппы порядка s группы G сопряжены в G.
П. А. Гольберг

8599. Кронекеровское произведение представлений симметрической группы. Литлвуд (The Kronecker product of symmetric group representations. Littlewood D. E.), J. London, Math. Soc., 1956, **31**, № 1, 89—93 (англ.)

Доказывается следующее обобщение формулы Робинсона и Толби:

$$((\alpha) H \uparrow G) \times ((\beta) G \downarrow H \times (\alpha)) \uparrow G \qquad (1)$$

(обозначения см. РЖМат, 1955, 4250). Используя формулу (1) и теорию S-функций Литлвуда (Littlewood D. E., The theory of groups characters and matrix representations of groups, 1950, Oxford, гл. 10), автор дает способ разложения прямого произведения двух неприводимых представлений симметрической группы в сумму неприводимых представлений.
С. Д. Берман

8600. О порядке группы автоморфизмов конечной группы. I. Ледерман, Нейман (On the order of the automorphism group of a finite group. I. Ledermann W., Neumann B. H.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A233**, № 1195, 494—506 (англ.)

Существует такая функция $f(n)$, что всякая конечная группа G, порядок которой не меньше $f(n)$, имеет по крайней мере n автоморфизмов. Наименьшая из функций $f(n)$ удовлетворяет условиям:

$$f(1)=1, \quad f(2)=3, \quad f(3)=f(4)=7,$$
$$f(n) \leqslant (n-1)^{n+(n-2)[\log_2(n-1)]} \quad \text{при } n>4.$$

В. К. Туркин

8601. Примарные группы классов вычетов по идеалам полиномиальных вычетов. Нёбауэр (Gruppen von Restpolynomidealrestklassen nach Primzahlpotenzen. Nöbauer Wilfried), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 3, 194—202 (нем.)

Продолжение предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 3594). В группе $\mathfrak{G}_{p^e}$ (p — простое) выделяется разрешимая подгруппа $\mathfrak{T}_{p^{e-1}}$, состоящая из всех элементов группы $\mathfrak{G}_{p^e}$, которые содержат многочлены вида $a_0 + a_1 x + p a_2 x^2 + \ldots + p^{e-2} a_{e-1} x^{e-1}$. Показано, что группа $\mathfrak{G}_{p^e}$ изоморфна группе, которая получается из регулярного представления симметрической группы S_p при всевозможных подстановках в матрицы представления вместо единиц элементов группы $\mathfrak{T}_{p^{e-1}}$.
С. Д. Берман

8602. О теореме Мурнагана. Ибрагим (On a theorem by Murnaghan. Ibrahim E. M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, **40**, № 5, 306—309 (англ.)

Мурнаган заметил (Murnaghan F. D., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, **38**, 966—973), что неприводимое представление $[\lambda]$ четномерной ортогональной группы и неприводимое представление $\langle\lambda\rangle$ унитарной симплектической группы той же размерности связаны соотношением $[\lambda] = [\lambda^*]^*$, где * обозначает ассоциированное разбиение. При этом, если (λ) — разбиение четного числа m, то $\langle\lambda\rangle \otimes \{\mu\} = ([\lambda^*] \otimes \{\mu\})^*$, а при нечетном m $\langle\lambda\rangle \otimes \{\mu\} = ([\lambda^*] \otimes \{\mu^*\})^*$ ($\{\mu\}$ — представление полной линейной группы).

В реферируемой заметке даются доказательства формул Мурнагана. Кроме того, доказаны некоторые другие соотношения между характерами ортогональной и симплектической групп.
С. Д. Берман

8603. О характерах ортогональной и симплектической групп. Литлвуд (On orthogonal and symplectic group characters. Littlewood D. E.),

J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 121—122 (англ.)

Получены формулы, связывающие характеры 2κ-мерной симплектической группы с характерами 2κ-мерной ортогональной группы. Эти формулы прозрачнее соответствующих формул Ибрагима (реф. 8602). М. И. Граев

8604. О неприводимых представлениях симметрической группы. Мурнаган (On the irreducible representations of the symmetric group. Murnaghan Francis D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 12, 1096—1103 (англ.)

Рассматриваются симметризованные кронекеровские степени представления $\Gamma(n-1,1)$ симметрической группы S_n в связи с задачей разложения прямого произведения двух неприводимых представлений группы S_n на неприводимые компоненты. Исследуются также симметризованные кронекеровские степени представления $\Gamma(n-1,1)\times\{\mu\}$, где μ — разбиение либо числа 5, либо числа 6. С. Д. Берман

8605. Теорема о разложении примарных групп. Хонда (On a decomposition theorem of primary groups. Honda Kin'ya), Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, **4**, № 1, 54—66 (англ.)

Дается еще одно доказательство теоремы о разложимости всякой конечной абелевой группы в прямую сумму циклических групп. Затем приводится новое доказательство основной теоремы предыдущей работы автора (РЖМат, 1953, 5622) и доказывается, что разложение группы, получающееся в этой теореме, с точностью до изоморфизма единственно. А. П. Мишина

8606. О сервантных подгруппах и прямых слагаемых абелевых групп. Гочаи (On pure subgroups and direct summands of abelian groups. Gacsalyi S.), Publs mat., 1955, **4**, № 1—2, 89—92 (англ.)

Доказано, что подгруппа A абелевой группы G тогда и только тогда является прямым слагаемым, когда любая система уравнений вида

$$m_1 x_{\alpha_1} + \ldots + m_k x_{\alpha_k} = a \quad (a \in A,\ m_i \text{ — целые числа}),$$

в которой число уравнений и общее число неизвестных могут иметь любую мощность, а в каждом отдельном уравнении число неизвестных конечно, имеющая решение в группе G, разрешима также и в подгруппе A. Доказано, также, что подгруппа A группы G тогда и только тогда сервантна в G, когда всякая система уравнений указанного выше вида, в которой число уравнений может иметь любую мощность, но общее число неизвестных, конечно, имеющая решение в группе G, имеет решение и в подгруппе A. А. П. Мишина

8607. О полной прямой сумме счетных абелевых групп. Лось (On the complete direct sum of countable abelian groups. Los Jerzy), Publs mat., 1954, **3**, № 3—4, 269—272 (англ.)

Доказано, что полная прямая сумма счетных абелевых групп без кручения тогда и только тогда разлагается в обычную прямую сумму счетных групп, когда все слагаемые, за исключением, быть может, только конечного числа, являются полными группами. Это — обобщение аналогичного результата, полученного ранее референтом для полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 (Укр. матем ж., 1950, 2 : 4, 64—70). Доказано также, что если в некотором семействе не более чем счетных редуцированных абелевых групп содержится такая счетная последовательность групп $G_1, G_2 \ldots$, что в группе G_n имеется элемент, порядок которого больше $n!$, то полная прямая сумма групп этого семейства не разлагается в обычную прямую сумму не более чем счетных групп. А. П. Мишина

8608. ζ-функции в теории групп и теорема Хайоша. Редеи (Die gruppentheoretischen Zetafunktionen und der Satz von Hajós. Rédei Ladislaus), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 3-4, 271—279 (нем.; рез. русс.)

Пусть G — конечная абелева группа, A_i $(i=1,\ldots,n)$ — ее циклические подгруппы, $p_1, \ldots, p_n$ — (не обязательно различные) простые числа, B_i — группа, состоящая из p_i-х степеней элементов группы A_i, $\mathfrak{M}$ — любое непустое подмножество множества $\mathfrak{N}$ всех чисел $1, 2, \ldots, n$, $A_{\mathfrak{M}}$ — произведение подгрупп A_i, где $i \in \mathfrak{M}$, $(A_{\mathfrak{M}})$ — число элементов в этом произведении и $(\mathfrak{M})$ — число элементов множества $\mathfrak{M}$. Положим

$$\rho(z) = \rho(z; A_1, \ldots, A_n) = \sum_{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}} (-1)^{(\mathfrak{M})} (A_{\mathfrak{M}})^{-z} + 1,$$

где z — комплексное переменное,

$$\rho_{\mathfrak{M}}(z) = \rho(z; B_{i_1} A_{\mathfrak{M}}/A_{\mathfrak{M}}, \ldots, B_{i_m} A_{\mathfrak{M}}/A_{\mathfrak{M}}),$$

где $i_1, \ldots, i_m$ — все различные числа из $\mathfrak{N} \setminus \mathfrak{M}$ (предполагается, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$), $\rho_0(z) = \rho(z; B_1, \ldots, B_n)$.

Доказывается эквивалентность теоремы Хайоша — если произведения $\alpha_1^{x_1} \ldots \alpha_n^{x_n}$, где $\alpha_i \in G$, $x_i = 0, \ldots, p_i - 1$ $(i=1,\ldots,n)$, образуют группу порядка $p_1 \ldots p_n$, то порядок хотя бы одного элемента α_i равен p_i — и следующего утверждения: если число элементов в произведении $A_{\mathfrak{N}}$ равно $p_1 \ldots p_n$ и $\rho_0(1) = 0$, $\rho_{\mathfrak{M}}(1) = 0$ $(\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N})$, то $\rho_0(2) = \rho_0(3) = \ldots = 0$. А. П. Мишина

8609. О группах, каждая циклическая подгруппа которых является некоторой степенью группы. Сас (On groups evecu cyclic cubgroup of which ie a power of the group. Szasz F.), Acta meth. Acad. sci hung., 1955, **6**, № 3—4, 475—477 (англ.; рез. русс.)

Доказано, что любая циклическая подгруппа некоторой группы G тогда и только тогда является некоторый степенью группы G (подгруппа называется k-й степенью группы G, если она порождается множеством k-х степеней всех элементов группы G), когда группа G циклическая. С. Н. Черников

8610. О бесконечных группах. Скотт (On infinite groups. Scott W. R.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 4, 589—598 (англ.)

Работа состоит из четырех не связанных между собой частей. В первой части доказано, что индекс пересечения любого множества подгрупп данной группы всегда меньше или равен произведению индексов этих подгрупп (индексы могут быть и бесконечными). Отсюда выводятся некоторые простые следствия. Затем вводится понятие индекса произвольного множества элементов группы, обобщающее понятие индекса подгруппы, и доказываются утверждения, касающиеся индекса теоретико-множественного объединения конечного числа подгрупп.

Во второй части доказано, что если G — бесконечная группа, H — ее подгруппа, P — система простых чисел (которая может быть и пустой), а S — множество всех элементов группы G, которые или ни в какой степени не попадают в H, или попадают в первый раз в H в степени, делящейся на простое число из P, то S либо пусто, либо имеет мощность, равную мощности всей группы G.

Для каждого элемента $x \in G$ обозначим через $E(x)$ множество всех элементов $g \in G$, для которых $x \notin \{g\}$, а через K множество всех элементов x, для которых мощность множества $E(x)$ меньше мощности всей группы G. В третьей части доказано, что если группа G бесконечна, то K является нормальным делителем. Если $G/K \cong G/H$, то $K \subseteq H$.

В четвертой части доказано, что абелева группа G тогда и только тогда изоморфна любой своей подгруппе, имеющей ту же мощность, что и вся группа G,

когда G является либо конечной абелевой группой, либо группой типа p^∞, либо прямой суммой циклических групп одного и того же простого порядка p, либо бесконечной циклической группой, либо, наконец, прямой суммой несчетного множества бесконечных циклических групп. Доказано также, что абелева группа G тогда и только тогда изоморфна любой своей факторгруппе, имеющей ту же мощность, что и группа G, когда G является либо конечной абелевой группой, либо бесконечной циклической группой, либо прямой суммой циклических групп порядка p, либо группой типа p^∞, либо, наконец, прямой суммой несчетного множества групп типа p^∞. Кроме того, доказано, что для абелевой группы G тогда и только тогда не существует эндоморфизма, отображающего ее на истинную подгруппу, мощность которой совпадает с мощностью группы G, когда G является либо конечной абелевой группой, либо группой типа p^∞, либо аддитивной группой всех рациональных чисел. Как следствие отсюда получается, что любой эндоморфизм абелевой группы G, отображающий ее на подгруппу, мощность которой равна мощности всей группы, тогда и только тогда является автоморфизмом, когда G — либо конечная абелева группа, либо аддитивная группа всех рациональных чисел.

А. П. Мишина

8611. О понятии n-полноты в группах. Солиан (Despre n-completitudine in grupuri. Solian Alexandru), Bul. ştiinţ. Acad. R. P., Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 2, 255—272 (рум.; рез. русс., франц.)

Группа G называется n-полной, если для каждого элемента $g \in G$ уравнение $x^n = g$ имеет в группе G хотя бы одно решение. Пусть A — произвольная группа. В каждом классе сопряженных элементов этой группы, кроме класса, состоящего из единицы, выберем по одному представителю a_λ и каждый из этих элементов представим в виде произведения n каких-то элементов группы A: $a_\lambda = b_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_n}$. Подгруппа группы A, порожденная всеми элементами вида $a^{-1} b_{\lambda_i} b_{\lambda_j}^{-1} a (a \in A)$, называется n-каноническим нормальным делителем. Доказано, что фактор-группа группы A тогда и только тогда является n-полной группой, когда соответствующее ядро содержит некоторый n-канонический нормальный делитель группы A. Далее доказано, что у абелевой группы тогда и только тогда не существует отличной от единицы n-полной фактор-группы, когда группа периодична и порядки всех ее элементов делят некоторую степень числа n.

Группа A называется n-метаполной, если она обладает нормальным рядом, все факторы которого — n-полные группы. Доказано, что всякая n-метаполная группа порождается n-ми степенями своих элементов. Произвольная группа A, в которой выполнено условие обрыва возрастающих нормальных цепей, обладает нормальным делителем, являющимся n-метаполной группой и содержащим все остальные n-метаполные нормальные делители группы A.

А. П. Мишина

8612. Обобщение теории групповых произведений Цаппа-Казадио. Редеи, Сеп (Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa-Casadio. Rédei L., Szép J.), Acta scient. math., 1956, 16, № 3—4, 165—170 (нем.)

Пусть G, Γ — произвольные группы $G_* \subset G$, $\Gamma_* \subset \Gamma$ — некоторые их изоморфные между собой подгруппы и $S: G_* \to \Gamma_*$ — фиксированный изоморфизм. Предположим, что любому элементу $\alpha \in \Gamma$ (соответственно любому элементу $a \in G$) отнесено такое отображение $a \to a^\alpha$ группы G (соответственно отображение $\alpha \to a^\alpha$ группы Γ) в себя, что 1) $a^\varepsilon = a$, $e^\alpha = e$ (соответственно $\alpha^e = \alpha$, $\varepsilon^\alpha = \varepsilon$), где e (соответственно ε) — единица группы G (соответственно группы Γ); 2) $a^\alpha \in G_*$, если $a \in G_*$ и $S(a^\alpha) = \alpha^{-1} S(a) \alpha^\alpha$ (соответственно $\alpha^a \in \Gamma_*$, если $\alpha \in \Gamma_*$ и $S^{-1}(\alpha^a) = a^{-1} S^{-1}(\alpha) a^\alpha$); 3) $(c^{\beta\alpha})^{-1} (c^\beta)^\alpha \in G_*$ для любых элементов $c \in G$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ и $S((c^{\beta\alpha})^{-1} (c^\beta)^\alpha) = ((\beta\alpha) c)^{-1} \beta c \alpha^{c\beta}$ (соответственно $(\alpha^{bc})^{-1} (\alpha^b)^c \in \Gamma_*$) для любых элементов $\alpha \in \Gamma$; $b, c \in G$ и $S^{-1}((\alpha^{bc})^{-1} (\alpha^b)^c = (bc)^\sigma)^{-1} b^\alpha c^{\alpha b}$. Тогда фактор-система $\mathfrak{W}$ мультипликативной системы $\mathfrak{M}$, элементами которой являются пары (a, α), $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$, а умножение определено формулой $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, \beta\alpha^b)$, по отношению конгруэнтности $(a, \alpha) \equiv (b, \beta)$, имеющему место тогда и только тогда, когда $a^{-1} b \in G_*$ и $S(a^{-1} b) = \alpha^{-1} \beta$ является группой. Отображения $a \to (a, \varepsilon)$, $\alpha \to (e, \alpha)$ определяют изоморфные вложения групп G и Γ в группу $\mathfrak{W}$, при которых подгруппы G_* и Γ_* отображаются в одну и ту же подгруппу. Кроме того, группа $\mathfrak{W}$ порождается подгруппами G и Γ. Оказывается, что описанная конструкция позволяет получить все группы, обладающие указанными свойствами.

Л. М. Глускин

8613. О локально нильпотентных группах. Маклейн (On locally nilpotent groups. McLain D. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 5—11 (англ.)

Доказаны некоторые известные результаты о локально нильпотентных группах. Некоторые доказательства проще известных.

Б. И. Плоткин

8614. Радикальные группы. Плоткин Б. И., Матем. сб., 1955, 37, № 3, 507—526

Максимальный локально нильпотентный нормальный делитель $R(G)$ некоторой группы G (существование и единственность этого нормального делителя следует из результатов предыдущей работы автора (РЖМат, 1956, 1069)) называется ее радикалом. Группа G называется радикальной, если существует такая возрастающая цепь инвариантных подгрупп

$$E = R_0(G) \subset R_1(G) \subset \dots \subset R_\alpha(G) \subset \dots \subset R_\mu(G) = G,$$

что $R(G/R_\alpha(G)) = R_{\alpha+1}(G)/R_\alpha(G)$ для любого индекса α. Доказано, что группа тогда и только тогда радикальна, когда она обладает возрастающим нормальным рядом с локально нильпотентными факторами. В частности, к числу радикальных групп относятся группы, обладающие разрешимыми возрастающими нормальными рядами (RN^*-группы). Вопрос о том, не исчерпываются ли в действительности RN^*-группами все радикальные группы, остается открытым. Радикал радикальной группы содержит свой централизатор и совпадает с множеством всех ниль-элементов группы (РЖМат, 1956, 223). Радикальная группа конечного специального ранга содержит нормальный делитель конечного индекса, коммутант которого является расширением периодической радикальной группы с помощью нильпотентной группы конечного ранга без кручения. Если в радикальной группе G без кручения все факторгруппы, являющиеся группами без кручения, обладают свойством однозначной извлекаемости корня, а ее радикал имеет конечный специальный ранг, то G является расширением своего радикала с помощью абелевой группы без кручения. Получен также ряд других результатов, как правило, более специального характера.

В. М. Глушков

8615. О дополняемости силовских П-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп. Черников С. Н., Матем. сб., 1955, 37, № 3, 557—566

Пусть G — локально конечная группа и A — ее инвариантная силовская П-подгруппа, где П — произвольное множество простых чисел. Доказано, что если группа G локально нормальна или если произведение подгруппы A на ее централизатор имеет в G конечный индекс, то подгруппа A дополняема в G, т. е. существует такая подгруппа $B \subset Y$, что $Y = AB$ и $A \cap B = 1$. В частности инвариантная силовская П-подгруппа локально конечной группы G дополняема в G, если она конечна или является конечным расширением полной абелевой группы с условием минимальности для подгрупп. Далее, локально нормальная группа тогда и только тогда локально разрешима, когда все ее силовские p-подгруппы по любому простому числу p дополняемы в ней. Основным орудием доказательства служит установленная автором теорема, позволяющая сводить вопрос о дополняемости силовских П-подгрупп в локально нормальных группах на вопрос о дополняемости силовских П-подгрупп в конечных группах. В. М. Глушков

8616. Вещественные линейные характеры симплектической модулярной группы. Рейнер (Real linear characters of the symplectic modular group. Reiner Irving), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 987—990 (англ.)

Симплектическая модулярная группа Γ_{2n} состоит из всех целочисленных матриц M порядка $2n$, удовлетворяющих условию $MFM' = F$, где $F = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, а E_n — единичная матрица порядка n. Доказано, что группа Γ_{2n} при $n > 2$ не имеет подгрупп индекса 2, а при $n = 1,2$ обладает только одной такой подгруппой.

Д. А. Супруненко

8617. Нормализатор некоторой модулярной подгруппы. Ньюман (The normalizer of certain modular subgroups. Newman Morris), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 29—31 (англ.)

Пусть G — группа целочисленных унимодулярных матриц (a_{ij}) второго порядка и пусть $G_0(n)$ — ее подгруппа, состоящая из всех матриц, для которых $a_{21} \equiv 0 \pmod n$. Доказано, что нормализатором подгруппы $G_0(n)$ является группа $N(n) = G_0(n/2^u 3^v)$, где $u = \min\left(3, \left[\frac{1}{2}\alpha\right]\right)$, $v = \min\left(1, \left[\frac{1}{2}\beta\right]\right)$, а числа α, β определяются из соотношения $n = 2^\alpha 3^\beta m$, $(m, 6) = 1$.

Д. А. Супруненко

8618. Альтернативное доказательство теоремы об унимодулярной группе. Ньюман (An alternative proof of a theorem on unimodular groups. Newman Morris), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 998—1000 (англ.)

Доказано, что любая подгруппа группы G, содержащая подгруппу $G_0(n)$ (реф. 8617), имеет вид $G_0(m)$, где m/n.

Д. А. Супруненко

8619. Производящая функция для усреднений по ортогональной группе. Джеймс (A generating function for averages over the orthogonal group. James A. T.), Proc. Roy. Soc., 1955, A229, № 1178, 367—375 (англ.)

Пусть H — группа ортогональных матриц порядка n, X — произвольная матрица порядка $n, r_1, r_2, \ldots, r_n$ — элементарные симметрические функции от собственных значений матрицы $X'X$, $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A и $dv(H)$ — нормированная ($v(H) = 1$) инвариантная мера на группе H. Доказано, что

$$\int_H \exp(\operatorname{tr} H'X)\, dv(H) = \xi(r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

где ξ — аналитическая функция от $r_1, r_2, \ldots, r_n$, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям

$$4\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^{(j)}(r_1, \ldots, r_n)\frac{\partial^2 \xi}{\partial r_\mu \partial r_\nu} + 2(n - j + 1)\frac{\partial \xi}{\partial r_i} - \delta_{1j}\xi = 0,$$

коэффициенты $a_{\mu\nu}^{(j)} = a_{\nu\mu}^{(j)}$ которых определяются формулами (при $\mu \leqslant \nu$):

$$a_{\mu\nu}^{(j)} = \begin{cases} r_{\mu+\nu-1}, & \text{если } 1 \leqslant j \leqslant \mu, \\ 0, & \text{если } \mu < j \leqslant \nu \text{ или } \mu + \nu < j, \\ -r_{\mu+\nu-j}, & \text{если } \nu < j \leqslant \mu + \nu. \end{cases}$$

Функция $\xi(r_1, r_2, r_3, 0, 0, 0)$ вычислена в явном виде. Знание функции ξ позволяет вычислить интегралы вида $\int m(H)\, dV(H)$, где $m(H)$ — одночлены, зависящие от элементов матрицы H (ξ является производящей функцией для таких интегралов). Рассмотрены некоторые интегралы, встречающиеся в математической статистике (например, в вопросах, связанных с нейтральным распределением Уишера). Н. Я. Виленкин

8620. К теории модулярных форм n-й степени. Кёхер (Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. II. Koecher Max), Math. Z., 1955, 61, № 4, 455—466 (нем.)

Первую часть см. РЖМат, 1955, 4388. В пространстве модулярных форм веса k, принадлежащих конгруэнц-подгруппе K модулярной группы Зигеля, определяется скалярное произведение

$$(f, g) = \frac{1}{V(K)} \int_{F(K)} f(Z)\, g(Z)\, |Y|^{-k} \frac{dX dY}{|Y|^{n+1}};$$

где $F(K)$ — фундаментальная область, а $V(K)$ — ее объем. Доказано, что произведение (f, g) существует, если хотя бы одна из форм f или g регулярна в «вершинах» фундаментальной области. Это произведение не зависит от K и обладает классическими свойствами скалярного произведения. И. И. Пятецкий

8621. О коммутаторе компактных групп. Витт (Über die Kommutatorgruppe kompakter Gruppen. Witt Ernst), Rend. mat. e applic, 1954, 14, № 1—2, 125—129 (нем.)

Доказано, что коммутатор компактной топологической группы замкнут, если группа содержит абелеву подгруппу конечного индекса или обладает лишь конечным числом внутренних автоморфизмов. В последнем случае коммутатор конечен. Если коммутатор конечен и не имеет центра, то группа обладает лишь конечным числом внутренних автоморфизмов.

Н. Я. Виленкин

8622. Топологические группы без центра. Гаия (Grupuri topologice fără centru. Ganea Tudor), Rev. Univ. C. I. Parhon şi Politehn. Bucureşti, Ser. ştiinţ. natur., 1953, № 3, 37—38 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказано, что локальное открытое отображение связной локально связной топологической группы в связную топологическую группу без центра допускает единственное продолжение на всю группу. Н. Я. Виленкин

8623. О некоторых классах групп, полных над топологическими полями. Глушков В. М., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 187—188

Резюме доклада. Топологическая группа G называется полной над топологическим полем F, если любой ее элемент содержится в подгруппе, являющейся непрерывным гомоморфным образом аддитивной группы поля F. Утверждается, что множество элементов любой топологической локально нильпотентной группы G, без

кручения, полной над простым топологическим полем F, можно одним и только одним способом обратить в такую локально нильпотентную алгебру Ли над полем F, что для любого элемента $x \in G$ отображение $\lambda \to \lambda x$ аддитивной группы поля F в группу G является непрерывным гомоморфизмом и операция умножения в группе G связана с лиевскими операциями формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа. Это соответствие между группами и алгебрами обладает обычными свойствами классического соответствия Ли. Относительно групп полных над полями вещественных и p-адических чисел утверждается, что локально бикомпактная локально нильпотентная группа без кручения тогда и только тогда полна над полем вещественных чисел (соответственно полна над полем p-адических чисел F и удовлетворяет второй аксиоме счетности), когда она является связной односвязной нильпотентной группой Ли (соответственно нильпотентной группой Ли над полем F).

Н. Я. Виленкин

8624. О некоторых группах Ли преобразований. Кошуль (Sur certains groupes de transformations de Lie. Koszul J. L.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 52, Strasbourg, 1953. Paris, 1953, 137—141 (франц.)

Пусть G — группа Ли, действующая дифференцируемым образом на дифференцируемом многообразии M. В алгебре всех дифференциальных форм на M выделяется подалгебра B базисных форм, инвариантная относительно внешнего дифференциала. Пусть M_G — пространство, точками которого являются классы транзитивности группы G. Известно, что в том случае, когда M является главным расслоенным пространством группы G, алгебра B отождествляется с алгеброй всех дифференциальных форм на M_G. Автор выделяет более общий случай, названный им регулярным. Пусть $p \in M$, H_p — стационарная подгруппа точки p, G_p — класс транзитивности, содержащий p. В регулярном случае требуется, чтобы для каждой точки $p \in M$ подгруппа H_p была компактна и чтобы в окрестности точки p существовало подмногообразие L, проходящее через p, дополнительное к G_p, инвариантное относительно H_p и такое, что если $ga = b$, где $g \in G$, $a, b \in L$, то $g \in H_p$. Доказывается, что если группа G компактна, то всегда имеет место регулярный случай. Как замечает автор, из теории пучков можно вывести, что в регулярном случае алгебра когомологий пространства M_G с вещественными коэффициентами изоморфна алгебре когомологий дифференциальной алгебры B.

А. Л. Онищик

8625. Об одном характеристическом свойстве инверсных и прямоугольных полугрупп. Тьеррен (Sur une propriété caractéristique des demi-groupes inversés et rectangulaires. Thierrin Gabriel), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 18, 1192—1194 (франц.)

Полугруппа D называется инверсной, если для каждого элемента $x \in D$ существует такой элемент $x' \in D$, что элементы xx' и $x'x$ идемпотентны. Полугруппа D называется прямоугольной, если из равенства $ax = bx = ay = m$ следует, что $by = m$. Отношение R в полугруппе D называется стационарным справа, если из $baRba'$ следует, что $xaRxa'$ для любого элемента $x \in D$; отношение R называется регулярным справа, если из aRb следует, что $axRbx$ для любого элемента $x \in D$. Аналогично определяется стационарность и регулярность слева. Доказано, что полугруппа D тогда и только тогда инверсна и прямоугольна, когда все отношения частичной упорядоченности в D, регулярные справа, стационарны слева, а все отношения частичной упорядоченности, регулярные слева, стационарны справа.

Л. М. Глускин

8626. Почти периодические функции на полугруппе Оре. Шифердеккер (Die fastperiodischen Funktionen einer Oreschen Halbgruppe. Schiefferdecker Eberhard), Acrh. Math., 1955, 6, № 6, 428—438 (нем.)

Полугруппа H с законом сокращения называется полугруппой Оре, если для любых элементов $a, b \in H$ существуют такие элементы $a', b' \in H$, что $ab' = ba'$. Для каждой полугруппы Оре H существует (с точностью до изоморфизма единственная) содержащая ее группа правых частных $D_r(H)$, любой элемент которой имеет вид $a\alpha^{-1}$, где $a, \alpha \in H$.

Почти периодическая функция на полугруппе с единицей определяется аналогично почти периодической функции на группе в смысле Маака (см., например, Левитан Б. М. Почти периодические функции, ГИТТЛ. М., 1953, гл. VI). Маак (Maak W., Acta math., 1952, 87, 33—58) показал, что каждой полугруппе H можно сопоставить такую группу G, что почти периодические функции на H и на G взаимно однозначно соответствуют друг другу. Однако в общем случае нахождения группы G нужно знать пространство всех почти периодических функций на H. В реферируемой статье доказывается, что для любой почти периодической функции на полугруппе Оре H с единицей существует (и притом единственное) почти периодическое продолжение на $D_r(H)$.

Указанная выше группа G для полугруппы Оре H является максимальной почти периодической группой (т. е. для любых элементов $a, b \in G$ существует такая почти периодическая функция $f(x)$, что $f(a) \neq f(b)$. Определен некоторый гомоморфизм группы $D_r(H)$ на группу G, являющийся изоморфизмом, если полугруппа H (или группа $D_r(H)$, что равносильно) обладает свойством максимальной почти периодичности.

Л. М. Глускин

8627. Логарифметики квазигрупп. Попова (Logarithmetics of quasigroups. Popova Helen), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 52—53 (англ.)

Сформулированы некоторые утверждения о логарифметиках (РЖМат, 1955, 4909) квазигрупп.

В. С. Чарин

8628. Об ассоциативных системах, всякий левый идеал которых имеет единицу. Воробьев Н. Н., Уч. Зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, 103, 83—90

Исследуется класс полугрупп $\mathfrak{M}$, состоящий из всех полугрупп G, у которых каждый левый идеал L обладает единицей, т. е. таким элементом $e \in L$, что $ex = xe = x$ для всякого $x \in L$. Любой односторонний идеал полугруппы $G \in \mathfrak{M}$ является двусторонним идеалом. Доказано, что $G \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда G является объединением попарно непересекающихся групп, множество единиц которых вполне упорядочено относительно отношения делимости: $e_1 > e_2 > \ldots > e_\xi > \ldots (e_\alpha > e_\beta$, если существуют такие элементы $x, y \in G$, что $e_\alpha = e_\beta x$ и $e_\alpha = y e_\beta$). Любая полугруппа $G \in \mathfrak{M}$ полностью определяется некоторым вполне упорядоченным множеством Γ групп и такой системой их гомоморфизмов γ_B^A: $A \to B$, $A, B \in \Gamma$; $A \geqslant B$, что: 1) γ_A^A есть тождественный изоморфизм, 2) если $A \geqslant B \geqslant C$, то $\gamma_C^A \gamma_B^A = \gamma_C^A$.

Е. С. Ляпин

8629 К. К теории эквивалентностей в полугруппах. Тьеррен (Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes. Thierrin Gabriel, Paris, Gauthier — Villars, 1955, 60 p.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 46, 1020 (франц.)

8630 К. Теория групп. Осима (羣論. 大島勝. 共立出版, 224 頁, 300 圓. Кёрицу - сюшан, 1954, 224 стр., 300 иен) (япон.)

8631 Д. Радикальные группы. Плоткин Б. И., Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н. Свердл. горн. ин-т, Свердловск, 1956

8632 Д. Замечания к топологической аксиоматике групп движения. Крамер (Studien zur topologischen Axiomatik der Bewegungsgruppen. Kramer Eugen. — Diss. math. ETH Zürich, 1955, 46 S.), Schweiz. Buch, 1956, **B 56**, № 1, 43 (нем.).

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

8633. Замечание к существованию алгебраически замкнутого расширения. Сода (Bemerkungen über die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung. Shoda Kenjiro), Proc. Japan. Acad., 1955, **31**, № 3, 128—130 (нем.)

Опираясь на предыдущую работу (Osaka Math. J., 1952, 4, 133—143), автор доказывает, что если каждая подсистема алгебраической системы является нормальной подсистемой (т. е. ядром некоторого гомоморфного отображения), то алгебраическая система обладает алгебраически замкнутым расширением. Е. Г. Шульгейфер

8634. Обобщение одной теоремы Дейринга. Мостовский (Eine Verallgemeinerung eines Satzes von M. Deuring. Mostowski Andrzej), Acta scient. math., 1955, **16**, № 3—4, 197—203 (нем.)

Пусть L — такое нормальное расширение поля K, что степень над K любого его подполя конечной степени не делится на характеристику поля K. Пусть далее $\mathfrak{M}$ — пространство всех функций, заданных на группе Галуа G поля L и принимающих значения в поле K. Группа G действует в пространстве $\mathfrak{M}$ по формуле $g[\varphi(a)] = \varphi(g^{-1}a)$, $g, a \in G, \varphi \in \mathfrak{M}$. Доказано, что пространство $\mathfrak{M}$ операторно изоморфно полю L (рассматриваемому как линейное пространство под полем K с группой операторов G). Для случая, когда степень поля L конечна, этот результат известен (Deuring, Math. Ann., 1932, **107**, 140—144). В этом случае пространство $\mathfrak{M}$ есть не что иное как пространство групповой алгебры группы G. С. Д. Берман

8635. К понятию нормы простой центральной алгебры. Фаддеев Д. К., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 4, 662—663

Пусть k_1 — конечное сепарабельное алгебраическое расширение некоторого поля k_0 и — простая центральная алгебра над полем k_1. Тогда определена (РЖМат, 1954, 2887) норма $N_{k_1|k_0}(\ )$ алгебры a, являющейся простой центральной алгеброй под полем k_0. Доказаны следующие свойства нормы:

1. Пусть $k_0 \subset k_1 \subset k_2$, где k_1, k_2 — конечные сепарабельные алгебраические расширения поля k_0. Тогда для любой простой центральной алгебры a над полем k_2

$$N_{k_2|k_0}(\ ) = N_{k_1|k_0}(N_{k_2|k_1}(\ )).$$

2. Пусть k_1 — конечное алгебраическое сепарабельное расширение поля k_0 и K — произвольное расширение поля k_0. Как известно, прямое произведение $K \cdot k_1$ распадается в прямую сумму взаимно аннулирующих полей $K_1, \ldots, K_\nu$. Пусть a — простая центральная алгебра над полем k_1 и пусть $c_K = c_1 + \ldots + c_\nu$, где c_i, $i = 1, \ldots, \nu$, — простые центральные алгебры над K_i. Тогда

$$[N_{k_1|k_0}(a)]_K \approx N_{K_1|K}(c_1) \times \ldots \times N_{K_\nu|K}(c_\nu).$$

3. Пусть k_0 является p-адическим полем, а k_1 — его конечным алгебраическим расширением с простым дивизором p_1. Тогда для любой простой центральной алгебры a над полем k_1

$$\left(\frac{a}{p_1}\right) = \left(\frac{N_{k_1|k_0}(\ )}{p}\right).$$

4. Пусть k_0 — поле алгебраических чисел конечной степени, k_1 — его конечное алгебраическое расширение, p — простой дивизор поля k_0 и $p_1, \ldots, p_\nu$ — простые делители дивизора p в поле k_1. Тогда для любой простой центральной алгебры a над полем k_1

$$\left(\frac{N_{k_1|k_0}(a)}{p}\right) = \sum_{r=1}^{\nu}\left(\frac{a}{p}\right).$$

Б. М. Уразбаев

8636. Заметка о модулярных инвариантах. Карлиц (A note on modular invariants. Carlitz L.), Nieuw. arch. wiskunde, 1954, **2**, № 1, 28—31 (англ.)

Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — система форм с коэффициентами из поля $GF[q]$, $C_1, \ldots, C_k$ — классы систем, эквивалентных по отношению к полной линейной группе над полем $GF[q]$. Доказано, что модулярный инвариант V, значения которого на классах C_i принадлежат полю Ф, содержащему k различных элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, может быть записан как многочлен степени $\leqslant k-1$ над полем Ф от инварианта I, для которого $I(C_i) = \alpha_i (i = 1, \ldots, k)$. Если $\Phi = GF[q_1]$, где $q_1 < k$, то существуют такие инварианты $I_1, \ldots, I_s$ $(q_1^{s-1} < k \leqslant q_1^s)$, что каждый инвариант V представляется в виде многочлена от $I_1, \ldots, I_s$, степень которого по I_i не превосходит $q_1 - 1$. С. Д. Берман

8637. Нейтральные поля на алгебраических кривых. Бенедикти (Neutral fields on algebraic curves. Benedicty Mario), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 196 (англ.)

Краткое сообщение, в котором указывается способ алгебраического обоснования теории нейтральных полей (Severi, Funzioni quasi abeliane. Bologna, 1947) на алгебраических кривых, следуя пути Шевалле (Chevalley, Introduction to the theorie of algebraic functions of one variable. N. Y., 1951). В. В. Морозов

8638. Алгебраичность некоторых алгеброидных особых точек. Самюэль (Algébricité de certains points singuliers algébroïdes. Samuel Pierre), J. math. pures et appl., 1956, **35**, № 1, 1—6 (франц.)

Исследуются особые точки алгеброидного многообразия, т. е. многообразия, определенного простым идеалом кольца формальных степенных рядов от n переменных. Доказано, что алгеброидная кривая или гиперповерхность в окрестности изолированной особой точки аналитически эквивалентна алгебраической кривой или соответственно гиперповерхности. Случай любой кривой сводится к случаю плоской кривой с помощью одного нового результата о локальных кольцах. В. В. Морозов

8639. О сепарирующих базисах трансцендентности для дифференциальных полей. Зейденберг (On separating transcendency bases for differential fields. Seidenberg A.), Proc. Amer. Math., Soc., 1955, **6**, № 5, 726—728 (англ.)

Пусть F — произвольное обыкновенное дифференциальное поле характеристики $p \neq 0$ и $G = F\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ — его сепарабельное расширение. Доказывается, что для любого алгебраически-дифференциального базиса (базиса трасцендентности) $v_1, \ldots, v_m$ поля G относительно поля F расширение $G/F\langle v_1, \ldots, v_m\rangle$ сепарабельно. Этот результат является дифференциально-алгебраи-

ческим аналогом известной алгебраической теоремы Маклейна и усиливает одну из теорем, доказанную автором ранее (Seidenberg A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 73, 174—190). В. М. Глушков

8640. **Теория дифференцирования и дифференты полей. Мория** (Theorie der Derivationen und Körperdifferenten. Moriya Mikao), Math. J. Okayama Univ., 1953, 2, № 2, 111—148 (нем.)

Пусть $\mathfrak{o}$ — область целостности, любой идеал которой однозначно разлагается в произведение степеней простых идеалов, k — поле отношений области целостности $\mathfrak{o}$, K — конечное сепарабельное расширение поля k, $\mathfrak{O}$ — кольцо элементов поля K, целых относительно $\mathfrak{o}$, и $\mathfrak{A}$ — произвольный идеал кольца $\mathfrak{O}$. Дифференцированием кольца $\mathfrak{o}$ по модулю идеала $\mathfrak{A}$ называется такое отображение D кольца $\mathfrak{O}$ в фактор-кольцо $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$, что $D(\alpha+\beta) \equiv D(\alpha)+D(\beta) \pmod{\mathfrak{A}}$, $D(\alpha\beta) \equiv \alpha D(\beta)+\beta D(\alpha) \pmod{\mathfrak{A}}$, $D(a) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}$, если $a \in \mathfrak{o}$. Совокупность всех дифференцирований кольца $\mathfrak{o}$ по модулю идеала $\mathfrak{A}$ естественным образом является $\mathfrak{O}$-модулем. Доказывается, что размерность этого модуля (т. е. длина его композиционного ряда) при изменении идеала $\mathfrak{A}$ ограничена сверху и что существует наибольший идеал $\mathfrak{D}_0$ из всех, для которых эта граница достигается. Этот идеал $\mathfrak{D}_0$ называется квазидифферентой поля K/k. Пусть $d_{\mathfrak{P}}$, где $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{O}$,— точная верхняя грань размерностей модулей дифференцирований кольца $\mathfrak{o}$ по модулю идеалов $\mathfrak{P}^r$ ($r = 0,1,2, \ldots$). Оказывается, что $d_{\mathfrak{P}} = 0$ для почти всех идеалов $\mathfrak{P}$. Следовательно, определен идеал $\mathfrak{D} = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{d_{\mathfrak{P}}}$. Доказывается, что этот идеал совпадает с дифферентой поля K, определенной по Дедекинду (см., например Вейль, Алгебраическая теория чисел, 1947, Изд-во ин. лит.). Кроме того, $\mathfrak{D}_0/\mathfrak{D}$. Если для всех простых идеалов $\mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{o}$ поле $\mathfrak{o}_0/\mathfrak{P} \cap \mathfrak{o}$ сепарабельно над $\mathfrak{o}/\mathfrak{P} \cap \mathfrak{o}$, то $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$. И. Р. Шафаревич

8641. **Модули с конечным числом образующих. Фландерс** (Finitely generated modules. Flanders Harley), Duke Math. J., 1955, 22, № 4, 477—483 (англ.)

Новое доказательство классической теоремы о подмодулях свободных модулей с конечным числом образующих над кольцом главных идеалов. А. П. Мишина

8642. **О критерии конечности для модулей. Селе** (On a finiteness criterion for modules. Szele T.), Publs mat., 1954, 3, № 3—4, 253—256 (англ.)

Доказана равносильность следующих свойств некоторого кольца R с единицей: 1) любой левый унитарный R-модуль, удовлетворяющий условиям минимальности и максимальности для подмодулей, конечен; 2) любой максимальный левый идеал кольца R имеет в R конечный индекс; 3) любой минимальный левый унитарный R-модуль конечен; 4) любой максимальный подмодуль левого унитарного R-модуля G имеет в G конечный индекс.

Доказано также, что если в теле выполнено условие максимальности для подколец, то это тело конечно; если в каком-то кольце R выполнено условие минимальности и максимальности для подколец, то кольцо R конечно (этот последний результат был ранее получен Шнейдмюллером — Матем. сб., 1950, 27, (69), 219—228). А. П. Мишина

8643. **О порядках элементов в модуле. Селпал** (On the orders of elements in a module. Szélpál I.), Publs mat., 1955, 4, № 1—2, 70 (англ.)

Для произвольного кольца R и произвольного его левого идеала L доказывается, что существует левый R-модуль, содержащий элементы порядка L. А. П. Мишина

8644. **О базах модулей над кольцом главных идеалов. Мостовский А. В., Сонсяда Э.**, Бюлл. Польской АН, 1955, Отд, 3, 3, № 3, 473—474

О базах модулей над кольцом главных идеалов. Мостовский А. В., Сонсяда Э. (On the bases of modules over a principal ideal ring. Mostowski A. W., Sąsiada E.), Bull. Acad. polon. sci., cl. 3, 1955, 3, № 9, 477—478 (англ.)

Доказывается, что если для некоторого элемента α кольца главных идеалов R подмодуль αG R-модуля G разлагается в прямую сумму циклических R-модулей, то и сам модуль G разлагается в прямую сумму циклических R-модулей. Непосредственным следствием этого результата является теорема Прюфера о разложимости в прямую сумму циклических модулей любого R-модуля G, для которого существует такой элемент $\alpha \in R$, что $\alpha G = 0$. А. П. Мишина

8645. **Две классические теоремы из теории идеалов. Рис** (Two classical theorems of ideal theory. Rees D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 155—157 (англ.)

Новым методом доказываются следующие два утверждения:

1. В нетеровом кольце A элемент x тогда и только тогда принадлежит пересечению $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i$ степеней идеала $\mathfrak{a}$, когда $x = ax$ для некоторого элемента $a \in \mathfrak{a}$.

2. Если в локальной области целостности A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ существует $\mathfrak{m}$-примарный идеал, порождаемый одним элементом, то $\mathfrak{m}$ является единственным простым идеалом кольца A.

Доказательство второго утверждения опирается на следующее предложение: для произвольных идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ нетерового кольца A существует такое натуральное число k, что при любом $n > k$ справедливо равенство $\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}^k \cap \mathfrak{b})\mathfrak{a}^{n-k}$. Е. Г. Шульгейфер

8646. **Исправления к моей статье «О гипотезе Крулля относительно колец оценок». Нагата** (Corrections to my paper «On Krull's conjecture concerning valuation rings». Nagata Masayoshi), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 209—212 (англ.)

В указанной в заглавии работе (Nagoya Math. J., 1952, 4, 29—33) была допущена неточность при доказательстве теоремы 1. В настоящей работе приводится исправленное доказательство этой теоремы.
Е. Г. Шульгейфер

8647. **Алгебраическая теория приближенных уравнений. Дедеккер** (Une théorie algébrique des équations approchées. Dedecker Paul), Bull. Soc. math. France, 1955, 83, № 4, 331—364 (франц.)

Пусть M — произвольная полугруппа с операцией $*$. Кольцо A называется M-градуированным, если его аддитивная группа разложена в прямую сумму подгрупп A_p, $p \in M$, причем $A_p A_q \subset A_{p*q}$. Элементы подгруппы A_p называются однородными элементами степени p. Пусть полугруппа M линейно упорядочена (причем из $a < b$ следует, что $a*c < b*c$ и $c*a < c*b$ для произвольного элемента $c \in M$) и пусть $\bar{M} = M \cup \infty$, где ∞ — такой элемент, что $\infty > a$ и $a*\infty = \infty*a = \infty*\infty = \infty$ для любого элемента $a \in M$. Функция f, определенная на кольце A, со значениями на упорядоченной полугруппе $\bar{M}$ называется M-оценкой, если 1) $f(a-b) \geqslant \min(f(a), f(b))$; 2) $f(ab) \geqslant f(a)*f(b)$; 3) $f(0) = \infty$. Оценка f называется сепарабельной, если из $f(a) = \infty$ следует, что $a = 0$. Если $f(ab) = f(a)*f(b)$, то оценка f называется нормой. Пусть f — произвольная M-оценка, в кольце A. Для любого элемента $p \in M$ обозначим через A_p и B_p подгруппы кольца A, состоящие из таких элементов, что $f(a) \geqslant p$ и соответственно

$f(b) > p$. Пусть $G(A)$ — такое M-градуированное кольцо, что для любого $p \in M$ определено изоморфное отображение ψ_p подгруппы A_p на подгруппу $G(A)_p$, причем если $a_p \in A_p$ и $a_q \in A_q$, то $\psi_p(a_p)\psi_q(a_q) = \psi_{p*q}(a_p a_q)$. Подмножество $H(A)$ кольца $G(A)$, являющееся прямой суммой подгрупп $\psi_p(B_p)$, является двусторонним идеалом. Соответствующее фактор-кольцо $\mathfrak{A} = G(A)/H(A)$ называется M-градуированным кольцом, присоединенным к кольцу A с оценкой f. Пусть γ: $G(A) \to \mathfrak{A}$ — естественный гомоморфизм. Определим отображение $\varphi: A \to \mathfrak{A}$, положив $\varphi(a) = \gamma(\psi_p(a))$, если $f(a) = p$, и $\varphi(a) = 0$, если $f(a) = \infty$. Доказывается, что если оценка f является нормой, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$; в общем же случае $\varphi(a)\varphi(b)$ равно либо $\varphi(ab)$, либо нулю. Далее $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ тогда и только тогда, когда либо $f(a+b) = f(a) = f(b)$, либо оценка хотя бы одного из элементов $a+b$, a, b равна ∞.

Пусть A_1 и A_2 — два кольца с M-оценками f_1 и f_2 соответственно. Линейное отображение α кольца A_1 в кольцо A_2 называется допустимым, если $f_1(a) \leqslant f_2(\alpha a)$ для любого $a \in A_1$. Каждое допустимое линейное отображение α кольца A_1 в кольцо A_2 индуцирует линейное отображение α^* кольца $\mathfrak{A}_1$, присоединенного к кольцу A_1, в кольцо $\mathfrak{A}_2$, присоединенное к кольцу A_2. Отображение α^* переводит однородные элементы в однородные элементы той же степени (такие отображения называются нейтральными). Для гомоморфного отображения α отображение α^* также гомоморфно. Линейное отображение D кольца A_1 в кольцо A_2 называется χ-дифференцированием, где χ — некоторый гомоморфизм кольца A_1 в кольцо A_2, если $D(ab) = Da\chi(b) + \chi(a)Db$. Если отображения χ и D допустимы, то D^* является χ^*-дифференцированием кольца $\mathfrak{A}_1$ в кольцо $\mathfrak{A}_2$.

В случае, когда M является полуструктурно упорядоченной полугруппой (т. е. полугруппой, в которой дополнительно определена однозначная бинарная операция пересечения с естественными свойствами) все приведенные выше результаты остаются справедливыми, если только на M-оценку f наложить следующее дополнительное условие: если значения $f(a)$ и $f(a')$ двух элементов $a, a' \in A$ несравнимы, то $f(a - a') > f(a) \cap f(a')$.

Приводятся необходимые и достаточные условия, налагаемые на класс подгрупп $\{A_p\}$ аддитивной группы кольца A, для того чтобы существовала такая M-оценка f кольца A, где M — некоторая полуструктурно упорядоченная полугруппа, что каждая из подгрупп A_p являлась бы полной совокупностью элементов $a \in A$, удовлетворяющих условию $f(a) \geqslant p$.

В дополнении к работе устанавливаются некоторые связи между гомоморфизмами и дифференцированиями. Тройка (A_1, A_2, χ), состоящая из колец A_1, A_2 и гомоморфного отображения χ кольца A_1 в кольцо A_2, определяет новое кольцо $L = L(A_1, A_2, \chi)$, аддитивной группой которого является прямая сумма аддитивных групп колец A_1 и A_2, а умножение определено следующим образом: $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, \chi(a_1) b_2 + a_2 \chi(b_1))$. Каждое χ-дифференцирование D кольца A_1 в кольцо A_2 индуцирует гомоморфизм h_D кольца A_1 в кольцо L, отображающий произвольный элемент $a \in A_1$ в элемент $h_D(a) = (a, Da)$. Обратно, пусть h — произвольный гомоморфизм кольца A_1 в кольцо L. Для любого элемента $a \in A$ положим $h(a) = (h_1(a), h_2(a))$. Оказывается, что гомоморфизм h тогда и только тогда индуцируется некоторым χ-дифференцированием кольца A_1 в кольцо A_2, когда отображение h_1 является тождественным автоморфизмом. Соответствующее χ-дифференцирование совпадает с h_2.

Аналогичный результат имеет место в случае, когда кольца A_1 и A_2 являются M-градуированными кольцами (M — произвольная полугруппа), а гомоморфизм χ и χ-дифференцирование D являются нейтральными отображениями кольца A_1 в кольцо A_2. В этом случае вместо кольца $L(A_1, A_2, \chi)$ рассматривается его «диагональное» подкольцо $L_\Delta(A_1, A_2, \chi)$, порождаемое подгруппами вида (A_{1p}, A_{2p}), где $p \in M$. Гомоморфизм h кольца A_1 в кольцо $L_\Delta(A_1, A_2, \chi)$, индуцированный нейтральным χ-дифференцированием D, является нейтральным гомоморфизмом.

Подобного же рода связи устанавливаются между допустимыми гомоморфизмами и допустимыми дифференцированиями в случае, когда кольца A_1 и A_2 являются кольцами с M-оценками, где M — полуструктурно упорядоченная полугруппа. Е. Г. Шульгейфер

8648. Алгебры когомологической конечной размерности. Эйленберг (Algebras of cohomologically finite dimension. Eilenberg Samuel), Comment. math. helv., 1954, 28, № 4, 310—319 (англ.)

Пусть Λ — алгебра конечного ранга над полем K. Когомологической размерностью $\dim \Lambda$ алгебры Λ называется наибольшее число n, для которого группа $H^n(\Lambda, A)$ нетривиальна для некоторого двустороннего Λ-модуля A. Размерностью $\text{l. dim}_\Lambda A$ произвольного левого Λ-модуля A называется минимальная длина n точной последовательности $0 \to X_n \to \cdots \to X_0 \to A \to 0$, в которой левые Λ-модули $X_0, \ldots, X_n$ проективны. Полной размерностью $\text{l. gl. dim}\,\Lambda$ алгебры Λ называется максимум размерностей всех левых Λ-модулей. Пусть Γ — фактор-алгебра алгебры Λ по радикалу N и $\Omega = \Lambda \otimes \Gamma^*$, где Γ^* — алгебра, антиизоморфная алгебре Γ. Доказано, что $\dim \Lambda = \text{l. gl. dim}\,\Omega = \text{l. dim}_\Omega \Gamma$. Кроме того, если алгебра Γ сепарабельна, то $\dim \Lambda = \text{l. dim}_\Lambda \Gamma$, и если $\dim \Lambda < \infty$, то Γ сепарабельна. Доказательство основано на понятиях и методах, введенных в книге Картана и автора (РЖМат, 1956, 6427). Из сформулированных результатов немедленно следует, что $\dim \Lambda = n < \infty$ тогда и только тогда, когда алгебра Γ сепарабельна и $\text{l. dim}_\Lambda \Gamma = n$. Последнее условие равносильно следующему: $\text{l.dim}\, N = n - 1$. Как сообщает автор, это условие конечности размерности впервые в несколько иной форме было найдено Икеда, Нагао и Накайямой, работа которых будет опубликована.

М. М. Постников

8649. Теория спиноров. Рашевский П. К., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 3—110

Изложение теории многомерных спиноров на основе изучения представлений клиффордовой алгебры. Доказана основная теорема о существовании единственного представления клиффордовой алгебры в комплексном n-мерном пространстве аффинорами n-мерного пространства. В связи с изучением фундаментальных автоморфизмов клиффордовой алгебры строятся фундаментальные спинтензоры. Особенное внимание уделяется случаям $n=2$ и $n=4$. Полученные результаты применяются к изучению представлений группы вращений n-мерного пространства. Далее строится теория спиноров в вещественном n-мерном пространстве той или иной сигнатуры. Особо изучается случай пространства специальной теории относительности. Установлена связь со спинорным аппаратом физики. В конце статьи рассматриваются спиноры в нечетномерном пространстве.

Н. Я. Виленкин

8650. Замечание о подпрямых суммах колец. Мак-Кой (Note on subdirect sums of rings. McCoy Neal H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 544—557 (англ.)

Для любого элемента a ассоциативного кольца R обозначим через $G(a)$ множество всех элементов вида $ax - x + \Sigma(y_i a z_i - y_i z_i)$, где $x, y_i, z_i \in R$. Пусть M — множество всех элементов $a \in R$, для которых $at \in G(at)$ при любом $t \in R$. Все нильпотентные элементы кольца R принадлежат M. Доказано, что $M = 0$ тогда и только тогда, когда кольцо R изоморфно подпрямой сумме некоторых простых колец S_α ($\alpha \in \mathfrak{A}$) с единицей, любой отличный от нуля элемент которой обладает хотя бы одной обратимой справа компонентой. В этом случае из соотношения $ab = 0$; $a, b \in R$, следует, что для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ либо $a_\alpha = 0$, либо $b_\alpha = 0$, где a_α (соответственно b_α) — α-тая компонента элемента a (соответственно b). Любая отличная от нуля компонента регулярного (в смысле Неймана) элемента кольца R обратима. Любой отличный от нуля нерегулярный элемент кольца R обладает бесконечным числом обратимых справа компонент. Регулярное кольцо R тогда и только тогда изоморфно подпрямой сумме тел, когда $M = 0$. Если $M = 0$ и кольцо R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, то кольцо R является дискретной прямой суммой тел.

В. А. Андрунакиевич

8651. О предположении Нагата. Хигман (On a conjecture of Nagata. Higman Graham), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 1—4 (англ.)

Доказано, что ассоциативная ниль-алгебра A индекса n над полем характеристики 0 или $p > n$ нильпотентна. Её индекс нильпотентности не превосходит $2^n - 1$, причем для достаточно больших n существуют алгебры, индекс нильпотентности которых больше n^2/e^2. См. также РЖМат, 1954, 3258.

А. И. Ширшов

8652. Некоторые замечания о π-регулярных кольцах ограниченного индекса. Томинага (Some remarks on π-regular rings of bounded index. Tominaga Hisao), Math. J. Okayama Univ., 1955, 4, № 2, 135—141 (англ.)

Ассоциативное кольцо R называется π-регулярным, если для каждого элемента $a \in R$ существует такое натуральное число n и такой элемент $x \in R$, что $a^n x a^n = a^n$.

Основной из доказанных результатов: Полное матричное кольцо над π-регулярным кольцом R, индексы нильпотентных элементов которого ограничены в совокупности, является π-регулярным кольцом ограниченного индекса нильпотентности.

Приводится также очень короткое и простое доказательство теоремы Левицкого о локальной нильпотентности ниль-колец ограниченного индекса. А. И. Ширшов

8653. О матричных кольцах. Томинага (A note on matrix rings. Tominaga Hisao), Math. J. Okayama Univ., 1955, 4, № 2, 189—191 (англ.)

Пусть радикал Джекобсона N некоторого кольца R является ниль-кольцом и пусть фактор-кольцо R/N разлагается в полную прямую сумму полных матричных колец над телами (кольца R, удовлетворяющие этим условиям, автор называет полупримарными). Тогда кольцо R изоморфно полному кольцу матриц $(R_1)_m$ некоторого порядка m над кольцом R_1, не являющимся полным кольцом матриц над каким бы то ни было кольцом. Порядок m является наибольшим общим делителем порядков матричных колец, суммой которых является фактор-кольцо R/N и, следовательно, однозначно определен кольцом R. Кольцо R_1 также однозначно определено (с точностью до изоморфизма).

А. И Ширшов

8654. Новое определение голоморфа группы и голоморфов кольца. Сендреи (Eine neue Definition des Holomorphes der Gruppe und der Holomorphe des Ringes. Szendrei J.), Acta math. hung., 1954, 5, № 3—4, 197—201 (нем.; рез. русс.)

Пусть Γ — произвольная группа, $a: \alpha \to \alpha^a$ — отображение группы Γ в себя и A — полугруппа всех таких отображений. Определим в множестве $A \circ \Gamma$ всех пар (a, α), где $a \in A$, $\alpha \in \Gamma$, умножение, положив $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b\beta)$. Группа Γ изоморфно вкладывается в мультипликативную систему $A \circ \Gamma$ посредством отображения $\alpha \to (e, \alpha)$, где e — тождественное отображение группы Γ на себя. Голоморф группы Γ определяется как максимальная подгруппа системы $A \circ \Gamma$, содержащая группу Γ.

Пусть теперь P — кольцо и D — множество всех парных отображений кольца P в себя в смысле Редеи (РЖМат, 1955, 3097). В множестве $D \circ P$ всех пар (a, α), где $a \in D$, $P \in D$, определены два действия: $(a\circ\alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$, $(a\circ\alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta)$. Кольцо P изоморфно вкладывается в систему $D\circ P$ посредством отображения $\alpha \to (0, \alpha)$, где 0 — парное отображение кольца P в нуль. Голоморфы кольца P определяются как максимальные подкольца системы $D\circ P$, содержащие кольцо P.

Доказывается эквивалентность этих определений соответствующим определениям Редеи для голоморфов кольца и группы (РЖМат, 1955, 3097). Л. М. Глускин

8655. Некоммутативные арифметики с исчерпывающей теорией идеалов. Барбилян (Aritmetici necomutative cu teorie exhaustivă a idealelor. Barbilian D.), Studii şi cercetări mat., 1953, 4, № 3—4, 257—344 (рум.; рез. русс., франц.)

Обобщая основные факты арифметик гиперкомплексных чисел и опираясь на идеи Шеваллея (Chevalley; L' arithmétique dans les algèbres des matrices, Paris, 1936), автор проводит построение некоторых типов некоммутативных арифметик, аналогичных коммутативным. В основе построения лежит некоммутативное кольцо H и подкольцо его O, содержащее полугруппу E единиц H (характеристическую подгруппу), в которую входят все неделители нуля в O. Подчиняя H и O некоторым аксиомам, автор последовательно строит четыре класса арифметик, названных им предварительными, примитивными замкнутыми и полными. Во всех построенных классах арифметик справедлива теорема Э. Нетер, т. е. каждый идеал допускает однозначно определенное разложение в коммутативное произведение простых идеалов (для предварительных арифметик термин «простой» заменяется на «лишенный делителей»). Примитивные арифметики являются обобщением регулярных арифметик Шеваллея (см. выше). Замкнутые арифметики являются, повидимому, одним из наиболее точных некоммутативных аналогов классических арифметик областей целостности и для них имеет место теорема исчерпания: при выполнении некоторых дополнительных предположений (например, существование алгоритма Евклида в $O \pmod E$), т. е. существование для любых $a \in O$ и $e \in E$ таких элементов $b \in O$ и $e' \in E$, что $a = be + e'$) арифметики, допускающие основную теорему типа теоремы Нетер, совпадают с замкнутыми (причем требование единственности разложения в теореме Нетер может быть несколько ослаблено). Совершенно аналогичное свойство исчерпания имеет место для полных арифметик. Повидимому, выполнение дополнительных условий, входящих в формулировку этих теорем, приводит к совпадению соответствующих подклассов классов замкнутых и полных алгебр; впрочем, этот вопрос в работе не разбирается. Проводится подробное исследование алгебр, для которых выполняются некоторые аксиомы полных арифметик. Устанавливаются условия, необходимые и достаточные для наличия полных арифметик в максимальных порядках алгебры H с единицей над полем частных некоторой об-

ласти целостности. Русское резюме очень неудачно и не может быть рекомендовано для ознакомления со статьей.

В. В. Морозов

8656. К теории односторонних уравнений в ассоциативных кольцах. Вильямайор (On the theory of unilateral equations in associative rings. Villamayor Orlando E.), Rev. mat. cuyana, 1955, **1**, № 1, 1—40 (англ.)

Пусть A — произвольное ассоциативное кольцо и $W = \{X_j\}$ — некоторое множество мощности β элементов, называемых неопределенными элементами. Кольцо A можно рассматривать как E-модуль, где E — кольцо целых чисел; каждый неопределенный элемент X_j является свободным образующим свободного одномерного E-модуля EX_j. Пусть $\Gamma_\beta(A)$ — прямая сумма всех конечных тензорных произведений $M_1 \circ M_2 \circ \ldots \circ M_n$, где каждое M_i является либо E-модулем A, либо одним из E-модулей EX_j, причем никакие два последовательных множителя M_i и M_{i+1} не совпадают одновременно с A. Элементы этих тензорных произведений называются одночленами, а элементы E-модуля $\Gamma_\beta(A)$ — многочленами. Произведение mm' двух одночленов $m = (\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$ и $m' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k)$ определяется формулой $mm' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k)$, если хотя бы один из элементов α_h и α'_1 не содержится в A; если же $\alpha_h \in A$ и $\alpha'_1 \in A$, то $mm' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_k)$, где $\alpha = \alpha_h\alpha'_1$. Умножение любых многочленов определяется по дистрибутивности. Модуль $\Gamma_\beta(A)$ относительно этого умножения является кольцом. Это кольцо называется свободным расширением кольца A с β образующими. Любое расширение (надкольцо) кольца A является гомоморфным образом некоторого свободного расширения $\Gamma_\beta(A)$; ядро этого гомоморфизма не пересекается с A. Рассматриваются следующие типы расширений кольца A: а) произвольные расширения; б) расширения, единицами в которых является единица кольца A (если A — кольцо с единицей); в) расширения, центры которых являются расширениями центра кольца A; г) коммутативные расширения (если кольцо A коммутативно). Равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется уравнением с коэффициентами из кольца A или A-уравнением, если $f(X_1, \ldots, X_n) \in \Gamma_n(A)$. Уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется тривиальным относительно расширений B одного из типов а), б), в) или г), если оно на этих расширениях превращается в тождество. Элемент x расширения B кольца A называется алгебраическим, если он удовлетворяет по крайней мере одному нетривиальному A-уравнению (с одним неизвестным); в противном случае элемент x называется трансцендентным. Расширение кольца A называется алгебраическим (трансцендентным), если оно порождается над A алгебраическими (трансцендентными) элементами. Приводятся примеры алгебраических (трансцендентных) расширений кольца A, содержащих трансцендентные (алгебраические) элементы.

A-уравнение $f(x) = 0$ называется разрешимым, если оно обладает решением в некотором расширении кольца A. Для того чтобы уравнение $f(x) = 0$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $A \cap (f(X)) = (0)$ в свободном расширении $\Gamma_1(A)$. Свойство разрешимости A-уравнения не пропадает при естественном вложении кольца A в минимальное надкольцо с единицей; поэтому можно ограничиться рассмотрением уравнений над кольцом A с единицей и расширений кольца A, принадлежащих к типу б).

Для любого элемента a кольца A (с единицей) через $0^r_a(0^l_a)$ обозначается его правый (левый) аннулятор (в кольце A). В кольце A с единицей правостороннее (левостороннее) линейное уравнение $xa = b\,(ax = b)$ разрешимо тогда и только тогда, когда $0^r_a \subseteq 0^r_b (0^l_a \subseteq 0^l_b)$. На примере показывается, что для кольца A без единицы указанные условия будут только необходимыми, но не достаточными. Разрешимое в коммутативном кольце A с единицей линейное уравнение $ax = b$ имеет решение в коммутативном расширении кольца A. Если любое такое уравнение имеет решение в A, то кольцо A называется полуполем. Доказано, что любой элемент простого (т. е. порождающегося одним элементом) алгебраического расширения полуполя алгебраичен над A.

Множество разрешимых A-уравнений (от одного неизвестного) называется совместным, если существует такое расширение кольца A, в котором каждое уравнение из данного множества имеет решение. Оставляя открытым вопрос о совместности любого множества разрешимых уравнений, автор доказывает теорему Рикабарра о том, что в кольце, изоморфном подпрямой сумме колец без делителей нуля, множество всех правосторонних (левосторонних) разрешимых линейных уравнений совместно. A-уравнение, обладающее некоторым свойством p, называется p-уравнением. Кольцо A называется p-замкнутым, если каждое разрешимое p-уравнение обладает в A по крайней мере одним решением. Утверждается, что каждое кольцо можно вложить в p-замкнутое кольцо. Отсюда, в частности, следует, что произвольное кольцо можно вложить в кольцо, в котором каждое разрешимое линейное уравнение обладает решением.

Далее указываются необходимые и достаточные условия для существования в некотором расширении кольца A общего решения конечной или бесконечной системы правосторонних (левосторонних) линейных уравнений с одним неизвестным, для разрешимости правостороннего (левостороннего) линейного уравнения с несколькими неизвестными и для разрешимости конечной или бесконечной системы правосторонних (левосторонних) линейных уравнений с несколькими неизвестными. Поскольку эти условия до некоторой степени аналогичны, приведем лишь одно из них.

Через $A'(A'')$ обозначим кольцо A, рассматриваемое как левый (правый) A-модуль, а через $A'_\alpha(A''_\alpha)$ обозначим дискретную прямую сумму α экземпляров A-модулей $A'(A'')$. Элементы A-модулей A'_α и A''_α будем называть соответственно левыми и правыми векторами. Внутренним произведением $(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_r)$ левого вектора $\mathbf{a}_l = (a_1, \ldots, a_\alpha)$ и правого вектора $\mathbf{b}_r = (b_1, \ldots, b_\alpha)$ назовем элемент $(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_r) = \Sigma a_i b_i$. Относительно этого умножения естественным образом определяется правый аннулятор $0^r_{\mathbf{a}_l}$ левого вектора $\mathbf{a}_l$ и левый аннулятор $0^l_{\mathbf{b}_r}$ правого вектора $\mathbf{b}_r$. Произвольной конечной системе левосторонних линейных уравнений $a_i x = b_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ соответствуют два правых вектора $\mathbf{a}_r = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b}_r = (b_1, \ldots, b_n)$. Оказывается, что эта система линейных уравнений тогда и только тогда имеет общее решение в некотором расширении кольца A с единицей, когда $0^l_{\mathbf{a}_r} \subset 0^l_{\mathbf{b}_r}$. Для разрешимости произвольной бесконечной системы левосторонних линейных уравнений необходима и достаточна разрешимость каждой конечной ее подсистемы. Аналогичные результаты справедливы для систем правосторонних линейных уравнений с одним неизвестным. Кольцо A называется правым (левым) полным полутелом, если каждая разрешимая система

правосторонних (левосторонних) линейных уравнений с одним неизвестным и с коэффициентами из A имеет решение в A; кольцо, которое одновременно является правым и левым полным полутелом, называется полным полутелом. Коммутативное полное полутело называется полным полуполем. Доказано, что простое расширение полного полуполя будет полным полуполем, если соответствующий этому расширению идеал кольца многочленов порождается многочленом, старший коэффициент которого равен единице. Если последнее условие не выполнено, то простое расширение полного полуполя может не быть даже полуполем.

Устанавливаются связи между существованием в кольце A с единицей решения системы односторонних линейных уравнений с несколькими неизвестными и замкнутостью подмодулей A-модулей A'_α и A''_α (подмодуль M правого A-модуля A''_α называется замкнутым, если правый аннулятор подмодуля 0^l_M левого A-модуля A'_α совпадает с M). При этом, в частности, обобщается один из результатов Икеда и Накаяма (РЖМат, 1955, 4282), а также доказывается, что кольцо A с единицей тогда и только тогда будет правым полным полутелом, когда для любого α замкнут каждый циклический подмодуль левого A-модуля A'_α. Е. Г. Шульгейфер

8657. О P-разрешимых кольцах. Левицкий (On P-soluble rings. Levitzki Jakob), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 2, 216—237 (англ.)

Развитие исследований автора (РЖМат, 1956, 7198) об алгебраических алгебрах и более широких классах ассоциативных колец: I-кольцах, т. е. кольцах, всякий правый нениль-идеал которых содержит ненулевой идемпотент, и FI-кольцах, т. е. кольцах, всякий гомоморфный образ которых является I-кольцом. Основным в работе является понятие разрешимости, преимущественно P-разрешимости.

Кольцо S называется P-кольцом, если все его нильпотентные элементы составляют идеал, совпадающий, очевидно, с радикалом Кёте этого кольца; к этому классу колец принадлежат как ниль-кольца, так и тела. Всякое подкольцо P-кольца само будет P-кольцом. Правый (левый) идеал кольца S, являющийся P-кольцом, называется правым (левым) P-идеалом. Сумма S' всех правых P-идеалов кольца S есть P-цоколь этого кольца; этот идеал совпадает с суммой всех левых P-идеалов кольца S. Кольцо S P-приводимо, если фактор-кольцо S/S' является ниль-кольцом. Наконец, кольцо S P-разрешимо, если оно обладает возрастающим вполне упорядоченным рядом идеалов $\{A_\nu\}$, причем $A_0 = 0$, $A_\tau = S$, все факторы которого $A_{\nu+1}/A_\nu$ P-приводимы.

Основные результаты работы относятся к P-разрешимым I и FI-кольцам. Так, всякий гомоморфный образ P-разрешимого FI-кольца сам является P-разрешимым FI-кольцом. Всякое FI-подкольцо P-разрешимого FI-кольца само P-разрешимо; в частности, всякая подалгебра P-разрешимой алгебраической алгебры сама P-разрешима. Далее определяется свойство D. Кольцо S обладает свойством D, если в S конечна всякая последовательность идемпотентов $e_{11}^{(1)}, e_{11}^{(2)}, \dots e_{11}^{(n)}, \dots$, удовлетворяющая следующим требованиям: а) идемпотент $e_{11}^{(n)}$ является первым в системе m_n^2 матричных единиц $e_{ik}^{(n)}$, $i, k = 1, 2, \dots, m_n$, где $m_n \geqslant 2$, б) $e_{ik}^{(n)} \in e_{11}^{(n-1)} S e_{11}^{(n-1)}$, $i, k = 1, 2, \dots, m_n$, $n = 1, 2, \dots$. Доказано, что всякое P-разрешимое FI-кольцо обладает свойством D. Вопрос об обращении этого результата в общем случае FI-колец остается открытым, однако алгебраическая алгебра тогда и только тогда P-разрешима, если она обладает свойством D. Свойство D используется также в последнем параграфе работы в формулировке одного обобщения критериев Капланского и автора, относящихся к проблеме референта о локальной конечности алгебраических алгебр. А. Г. Курош

8658. Псевдорегулярность. Дивинский (Pseudo regularity. Divinsky N.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 3, 401—410 (англ.)

Элемент x ассоциативного кольца A называется правым псевдорегулярным элементом, если существует такой элемент $y \in A$, что $x + xy + x^2 y = 0$. Идеал, состоящий из правых псевдорегулярных элементов, называется псевдорегулярным справа идеалом. Максимальный псевдорегулярный справа двусторонний идеал называется подрадикалом кольца. Он всегда существует, определен однозначно и содержится в радикале Джекобсона. Если $x \in x\,A$ для любого элемента $x \in A$, то подрадикал совпадает с радикалом Джекобсона. Любое коммутативное кольцо с нулевым подрадикалом является подпрямой суммой подпрямо неразложимых колец, являющихся либо полями либо кольцами, ограниченными (в смысле Холла) своим максимальным ниль-идеалом. В. А. Андрунакиевич

8659. Теорема Фридрихса. Линдон (A theorem of Friedrichs. Lyndon R. C.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 1, 27—29 (англ.)

Новое доказательство теоремы Фридрихса (РЖМат, 1956, 258).

8660. Коммутативные ограниченные алгебры Ли. Джекобсон (Commutative restricted Lie algebras. Jacobson N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 3, 476—481 (англ.)

Изучаются ограниченные алгебры L с нулевым умножением над полем F характеристики $p > 0$. Доказывается, в частности, что из алгебраической замкнутости поля F и полупростоты алгебры L следует существование такого базиса $(h_1, h_2, \dots, h_n)$, что $h_i^p = h_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. А. И. Ширшов

8661. О простой алгебре Ли характеристики 2. Шафер, Томбер (On a simple Lie algebra of characteristic 2. Schafer R. D., Tomber M. L.), Mem. Amer. Math. Soc., 1955, № 14, 11—14 (англ.)

Строится и изучается простая алгебра Ли ранга 26 над полем характеристики 2. А. И. Ширшов

8662. Некоммутативные йордановы алгебры характеристики нуль. Шафер (Noncommutative Jordan algebras of characteristic 0. Schafer R. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 3, 472—475 (англ.)

Алгебра, удовлетворяющая соотношениям $(a^2 b)\,a = a^2\,(ba)$ и $(ab)\,a = a\,(ba)$, называется автором некоммутативной йордановой алгеброй. Класс таких алгебр включает в себя альтернативные, йордановы и лиевы алгебры. Алгебра A под полем F называется допускающей след, если на ней можно определить линейную функцию $\delta(x) \in F$, $x \in A$, со следующими свойствами: $\delta(xy) = \delta(yx)$; $\delta((xy)\,z) = \delta(x\,(yz))$; $\delta(e) \neq 0$, если $e^2 = e$; $\delta(x) = 0$, если $x^k = 0$. Доказано, что любая некоммутативная йорданова алгебра над полем без характеристики допускает след. Опираясь на это утверждение, автор строит структурную теорию этого класса алгебр. В этой теории под радикалом алгебры понимается максимальный ниль-идеал. Для алгебр Ли эта теория тривиальна. А. И Ширшов

8663. О полных структурах и о проблеме Биркгофа и Фринка. Балачандран (On complete lattices and a problem of Birkhoff and Frink. Balachandran V. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 4, 548—553 (англ.)

Элемент a структуры L называется неразложимым в объединение (пересечение), если из $a_1 \cup a_2 = a$ ($a_1 \cap a_2 = a$) следует, что $a = a_1$ или $a = a_2$, и называется простым относительно объединений (пересечений), если из $a_1 \cup a_2 \geqslant a$ ($a_1 \cap a_2 \geqslant a$) следует, что $a_1 \geqslant a$ или $a_2 \geqslant a$. Аналогично, элемент a структуры L называется вполне неразложимым в объединение (пересечение), если из $\bigcup_i a_i = a$ ($\bigcap_i a_i = a$) следует, что $a = a_{i_0}$ для некоторого i_0, и называется вполне простым относительно объединений, если из $\bigcup_i a_i \geqslant a$ ($\bigcap_i a_i \geqslant a$) следует, что $a_{i_0} \geqslant a$ для некоторого i_0. Структура L называется вполне дистрибутивной относительно пересечений, если $a \cup (\bigcap_i a_i) = \bigcap_i (a \cup a_i)$ для любых элементов a, $a_i \in L$. Рассматриваются следующие свойства структур: а) каждый элемент структуры является объединением конечного числа простых относительно объединений элементов. б) структура дистрибутивна и каждый ее элемент является объединением конечного числа неразложимых в объединение элементов, в) структура идеалов данной структуры вполне дистрибутивна относительно пересечений, г) каждый вполне неразложимый в пересечение идеал структуры вполне прост относительно пересечений (как элемент структуры идеалов). Доказано, что для полных структур эти свойства равносильны. Полные структуры с дополнениями, обладающие этими свойствами, являются конечными булевыми алгебрами и обратно. Удовлетворяющая условию обрыва возрастающих цепей структура с нулем тогда и только тогда вполне дистрибутивна относительно пересечений, когда она обладает свойством а). И. В. Стеллецкий

8664. Заметка о подпрямых произведениях. Флейшер (A note on subdirect products. Fleischer Isidore), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, 6, № 3—4, 463—465 (англ.; рез. русс.)

Пусть A — алгебра в смысле Биркгофа и θ, θ' — отношения конгруэнтности на A. Рассматривается вопрос о возможности представления алгебры A в виде подпрямого произведения алгебр A/θ и A/θ', состоящего из всех таких пар элементов, что образы двух компонент пары при некоторых гомоморфизмах совпадают. Доказывается, что такое представление существует тогда и только тогда, когда отношения θ и θ' перестановочны. Л. М. Глускин

8665. Замечание относительно теоремы погружения для алгебраических систем. Робинсон (Note on an embedding theorem for algebraic systems. Robinson A.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 2, 249—252 (англ.)

Алгебраической системой называется множество, в котором определены некоторые отношения (вообще говоря, с различным числом мест). Опираясь на известную теорему А. И. Мальцева (Матем сб., 1936, **1** (43), 323—336), автор доказывает, что если любая конечная подсистема системы M может быть погружена в систему, удовлетворяющую данному множеству аксиом K, то и сама система M может быть погружена в некоторую систему, удовлетворяющую множеству аксиом K. Частным случаем этой теоремы является основная теорема Неймана (РЖМат, 1955, 4293). Автор, повидимому, не знаком с работой А. И. Мальцева (Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 1941, **1**, № 1, 3—9), в которой подробно развит метод доказательства локальных теорем, подобных теореме автора. А. А. Виноградов

8666 К. Общая теория алгебраических чисел. Фуртвенглер (Allgemeine Theorie der algebraischen Zahlen. Furtwängler Philipp), Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. **12**, 19, Band I. Algebra und Zahlentheorie. 2. Teil. C. Reihe Zahlentheorie. Heft 8, Teil II. Leipzig, B. C. Teubner Verlagsgesellschaft, 1953, 50 pp., 6.00 DM.) (нем.)

Эта статья нового издания Энциклопедии математических наук (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften) является опубликованием рукописи Фуртвенглера, написанной в 1938 г. и позднее значительно дополненной Эйхлером, Хассе и Иена. Она охватывает ту часть теории алгебраических чисел, которая рассматривает свойства конечных алгебраических числовых полей в целом; теория полей классов, теория комплексных умножений и другие специальные отделы теории полей алгебраических чисел должны быть даны в других статьях. Этот материал хорошо обработан и удачно расположен в относительно малом объеме. Содержание в основном сводится к следующему. 1. Теория идеалов полей алгебраических чисел; методы Дедекинда и Кронекера. 2. Метод Куммера-Хензеля с теорией метрик. 3. Структура колец классов вычетов по модулю целого идеала. 4. Теория ветвления. 5. Классы идеалов и единицы. 6. Разложимые формы и решетки Клейна. 7. Порядки и их ведущие идеалы. 8. Ведущие идеалы Артина и L-классы Артина. 9. Вычисление числа классов аналитическим методом. K. Iwasawa

Перевод из Math. Revs., 1954, **15**, № 5, 404

8667 К. Алгебра. II. Теория колец. Накаяма (Nakayama Tadasi). 代數學 II. 環論. 現代數學—5. 中山正等. 岩波書店, 436 頁, 800圓. Иванами — сётэн, 1954, 436 стр., 800 иен) (япон.)

См. также: 8489, 8531, 8682, 8766, 8795, 8807 К, 8835, 9029, 9034—9045, 9076, 9080—9082, 9085 К, 9087, 9089, 9093, 9094

ТОПОЛОГИЯ

8668. Об отделимости множеств. Папич (Sur la séparation des ensembles. Papić P.), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, **6**, № 3—4, 158—161 (франц.; рез. серб.)

Непересекающиеся множества M и N топологического пространства E называются отделенными, если существуют такие открытые множества G и H, что

$$G \cap H = \Lambda, \quad G \cup H = E, M \subseteq G, \quad N \subseteq H.$$

Теорема 1. Во всяком T_1-пространстве, допускающем ветвящуюся базу окрестностей (РЖМат, 1954, 1591), любые два замкнутые множества отделены.

Теорема 2. Для отделенности любых двух замкнутых непересекающихся множеств нульмерного метрического пространства E необходимо и достаточно, чтобы E допускало ветвящуюся базу окрестностей.

Достаточность условия следует из теоремы 1. Его необходимость вытекает из следующей леммы: Если в нульмерном метрическом пространстве E любые два непересекающиеся замкнутые множества могут быть отделены, то во всякое открытое покрытие пространства E можно вписать локально конечное открыто-замкнутое покрытие.

Теорема 3. Для того чтобы в нульмерном метрическом пространстве E любые два непересекающиеся замкнутые множества могли быть отделены, необхо-

димо и достаточно, чтобы E было гомеоморфно некоторому вполне упорядоченному пространству.
А. С. Пархоменко

8669. Об универсальном метрическом пространстве компактов. Тумаркин Л. А., Вестн. Моск. ун-та, 1956, № 2, 15—19

Доказано, что не существует компакта, содержащего изометрический образ любого компакта диаметра $\leqslant d$ (теорема 2).

Автор ставит ряд проблем, из которых отметим две: б) построить универсальное метрическое пространство минимальной размерности со счетной базой, содержащее изометрический образ всякого метрического пространства, состоящего не более чем из счетного множества точек; г) существует ли универсальное конечномерное метрическое пространство со счетной базой, содержащее изометрический образ всякого метрического пространства размерности $\leqslant n$ со счетной базой?
А. С. Пархоменко

8670. Об образах открытого интервала при замкнутых непрерывных отображениях. Морита (On images of an open interval under closed continuous mappings. Morita K.), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 1, 15—19 (англ.)

Для того чтобы метрическое пространство Y было образом открытого прямолинейного интервала (0,1) при замкнутом непрерывном отображении, необходимо и достаточно, чтобы Y было сепарабельным локально компактным связным локально связным пространством, компактное замыкание которого получается присоединением к пространству Y не более двух точек.
А. С. Пархоменко

8671. Непрерывные отображения некоторого семейства. Грот (Continuous mappings of a certain family. Grott J. de), Fundam. math., 1955, **42**, № 1, 203—206 (англ.)

Известно, что в каждом полном сепарабельном метрическом пространстве мощности $\mathfrak{c}$ существует такое семейство F подмножеств этого пространства, имеющее мощность $2^{\mathfrak{c}}$, что никакое множество A этого семейства не может быть отображено в (или на) другое множество этого семейства с помощью непрерывного отображения f, удовлетворяющего условию: мощность множества $f(A)$ равна $\mathfrak{c}$ (Kuratowski C., Topologie I., Warszawa, 1952, 333). Автор доказывает, что в случае плоскости эта теорема может быть усилена; именно, об отображении f достаточно предполагать, что образ $f(A)$ содержит более одной точки. Автор замечает, что эта теорема в ее усиленной форме справедлива для произвольного евклидова пространства R_n (где $n>1$). Однако указанная выше теорема в ее усиленной форме не справедлива для произвольного полного сепарабельного пространства мощности $\mathfrak{c}$.
S. Mrowka

8672. Одно двойственное свойство, равносильное свойству Янишевского. Лелек А., Бюл. Польской АН Отд. 3, 1955, № 11, 583—586

Доказывается равносильность следующих двух свойств локально связного континуума X: (J). Если C_1 и C_2 суть два континуума, расположенные в X, общая часть C_1C_2 которых несвязна, то $X\setminus(C_1\cup C_2)$ тоже несвязно. (Z) Если C и R — соответственно континуум и область, расположенные в X, дополнения $X\setminus C$ и $X\setminus R$ которых связны, то из связности множества $C\setminus R$ следует связность множества $R\setminus C$ и наоборот.
А. С. Пархоменко

8673. Замечания к данному К. Ситниковым решению одной задачи Урысона. Витушкин А., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 1, 5—8

П. С. Урысон поставил вопрос о том, всякое ли $(n-1)$-мерное множество A в n-мерном евклидовом пространстве R^n разрезает некоторый шар U пространства R^n (в том смысле, что в $U\setminus A$ имеется пара точек, которую нельзя соединить никаким континуумом, лежащим в $U\setminus A$). Референт дал отрицательное решение задачи Урысона даже при $n=3$ (РЖМат, 1955, 134). В то же время из общей теоремы о препятствиях, доказанной референтом (Докл. АН СССР, 1952, **83**, № 1, 31), следует, что проблема Урысона получает положительное решение, если самое разрезание понимать не в теоретико-множественном, а в гомологическом смысле (как существование нульмерного цикла в $U\setminus A$, не гомологичного в некотором смысле нулю в $U\setminus A$). Однако довольно естественно попытаться дать проблеме Урысона положительное теоретико-множественное решение, называя множество A слабо разрезающим шар U, если в $U\setminus A$ существует пара точек, которую нельзя соединить никакой простой дугой, лежащей в $U\setminus A$. В реферируемой работе показывается, что эта попытка обречена на неудачу: в R^3 строится нульмерное множество A, слабо разрезающее некоторый шар U.
К. А. Ситников

8674. Локальные свойства открытых отображений. Вильямс (Local properties of open mappings. Williams R. F.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 3, 339—345 (англ.)

Рассматривается открытое отображение метрического пространства X на метрическое пространство Y. Счетная база $\{s_i\}$ окрестностей пространства X занумерована так, что диаметр множеств s_i стремится к 0 при $i\to\infty$. Отображение f называется регулярным в точке $x\in X$, если для любой окрестности U точки x можно подобрать такую окрестность V точки x, что если $y\in f(V)$, то $f^{-1}(y)\cap V$ лежит в одной компоненте множества $f^{-1}(y)\cap U$.

Теорема 1. Если f — непрерывное отображение пространства X на пространство Y и для каждой точки $y\in Y$ множество точек локальной связности множества $f^{-1}(y)$ плотно на нем, то отображение f регулярно в каждой точке некоторого множества типа G_δ, плотного на X.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 множество точек локальной связности пространства Y всюду плотно на Y, то множество точек локальной связности пространства X содержит плотное на X множество типа G_δ.

Теорема 3. Если пространство X лежит в плоскости, пространство Y локально связно и для каждой точки $y\in Y$ множество $f^{-1}(y)$ локально связно, то существует такое открытое множество X', плотное в X, что X локально связно в каждой точке множества X'.
А. Д. Тайманов

8675. Пример монотонного неприводимого отображения трехмерного куба на четырехмерный. Келдыш Л. В., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 6, 957—960

Дается краткое описание построенного автором примера монотонного неприводимого отображения куба на четырехмерный куб. Отображение это не открыто, и проблема П. С. Александрова о возможности открытого отображения трехмерного куба на куб большей размерности остается открытой.
А. Д. Тайманов

8676. О некоторых свойствах отображений сферы в евклидово пространство. Яворовский Я. В., Бюлл. Польской АН, 1955, отд. 3, **3**, № 11, 579—581

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть F — замкнутое центрально симметричное подмножество n-мерной сферы S^n, содержащее замкнутое центрально симметричное подмножество K, ациклическое (в смысле Вьеториса) в размерностях

$<n-1$ по модулю 2. Тогда существует непрерывная действительная функция f, определенная на S^n и удовлетворяющая в точках множества F и только в них условию $f(x)=f(-x)$. Более того, функция f может быть сделана постоянной на множестве F.

Теорема 2. Пусть F — непустое центрально симметричное подмножество n-мерной сферы S^n. Тогда существует непрерывное отображение f сферы S^n в n-мерное евклидово пространство, удовлетворяющее условию $f(x)=f(-x)$ в точках множества F и только в них. Более того, отображение f может быть сделано постоянным на множестве F. А. С. Шварц

8677. **Инволюционные отображения и покрытия сфер.** **Фет А. И.**, Тр. Семинара по функцион. анализу Воронежск. ун-та, 1956, вып. 1, 55—71

Подробное изложение заметки автора в Докл. АН СССР (РЖМат, 1955, 2608). А. С. Шварц

8678. **Поля линейных элементов и лоренцевы строения на дифференцируемых многообразиях.** **Маркус** (Line element fields and Lorentz structures on differentiable manifolds. Markus L.), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 411—417 (англ.)

Найдены необходимые и достаточные условия ориентируемости поля линейных элементов с изолированными особенностями на некотором дифференцируемом многообразии. Из этих условий, в частности, следует, что любое поле линейных элементов ориентируемо, если фундаментальная группа этого многообразия не содержит подгрупп индекса 2.

Далее показано, что на компактном многообразии тогда и только тогда можно определить не имеющее особенностей поле линейных элементов, когда эйлерова характеристика этого многообразия равна нулю. Этот результат получен также Самельсоном (Samelson H., Portugaliae math., 1951, 10, 129—133). Рассматриваются также некомпактные многообразия.

М. М. Постников

8679. **Внутренние гомологичные дифференцируемые многообразия.** **Том** (Variétés différentiables cobordantes. Thom M. R.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 143—149 (франц.)

Обзор результатов ранее опубликованной работы (РЖМат, 1956, 291). М. М. Постников

8680. **Гомологии пространства отображений S_m^X и гомологическая структура пространства X.** **Мардешич** (Sur l'homologie de l'espace fonctionnel S_m^X et la structure homologique de X. Mardešić Sibe), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 9, 1112—1114 (франц.)

Через S_m^X обозначается пространство всех непрерывных отображений k-мерного компакта X в m-мерную сферу S_m. Доказывается следующая теорема: Группы гомологий $H_p(S_m^X, G)$ пространства S_m^X по произвольной группе коэффициентов G зависят лишь от k-мерной группы целочисленных когомологий $H^k(X)$ компакта X. А. С. Шварц

8681. **Кольцо когомологий пространства, расслоенного на сферы.** **Хирш** (L'anneau de cohomologie d'un espace fibré en sphères. Hirsch Guy), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 16, 1021—1023 (франц.)

Общий метод, развитый автором (РЖМат, 1956, 5680), применяется к случаю пространства, расслоенного на сферы, слои которого гомологичны нулю.

М. М. Постников

8682. **Когомологии с коэффициентами в пучке неабелевых групп.** **Френкель** (Cohomologie à valeurs dans un faisceau non abélien. Frenkel Jean), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 25, 2368—2370 (франц.)

Известная теория когомологий (в размерностях 0,1) над неабелевыми группами обобщается на случай, когда областью коэффициентов является пучок групп. Утверждается, что полученные результаты применимы в теории расслоенных пространств (в задаче сужения структурной группы). М. М. Постников

8683. **Некоторые свойства произведений Стинрода.** **Хирш** (Quelques propriétés des produits de Steenrod. Hirsch Guy), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 15, 923—925 (франц.)

Пусть x, y, z — произвольные коцепи по mod 2 некоторого комплекса K. Доказывается, что

$$(x\smile y)\smile_1 z+x\smile(y\smile_1 z)+(x\smile_1 z)\smile y=0,$$

$$(x\smile_1 y)\smile_1 z+x\smile_1(y\smile_1 z)+(x\smile_1 z)\smile_1 y+x\smile_1(z\smile_1 y)=0$$

(первая формула доказана автором в обобщенном виде для любой области коэффициентов). Эти формулы применяются для исследования так называемого «тройного произведения Масси». М. М. Постников

8684. **Гомологии спинорной группы.** **Шварц А. С.**, Докл. АН СССР, 1955, 104, № 1, 26—29

Вычислена алгебра Понтрягина mod 2 спинорной группы spin (n). Из этого вычисления, в частности, следует, вопреки одному утверждению Бореля, что при $n=2a+1$ алгебра Понтрягина коммутативна.

М. М. Постников

8685. **Гомологии спинорной группы.** **Араки** (On the homology of spinor groups. Araki Shôrô), Mem. Fac. Sci. Kyûsyû Univ., 1955, A9, № 1, 1—35 (англ.)

Исходя из клеточного разбиения спинорной группы, автор доказывает полученные Борелем (РЖМат, 1954, 5083) факты относительно алгебры Понтрягина (по модулю 2) спинорной группы. Новым по сравнению с результатами Бореля является указание циклов, классы гомологии которых образуют простую систему образующих (РЖМат, 1954, 5083) алгебры Понтрягина.

Примечание референта. Алгебра Понтрягина спинорной группы по модулю 2 полностью вычислена референтом (реф. 8684). А. С. Шварц

8686. **Алгебра гомологий пространства путей.** **Карпелевич Ф. И., Онищик К. Л.**, Докл. АН СССР, 1956, 106, № 6, 967—969

Пусть X — односвязное топологическое пространство и Ω — пространство замкнутых путей в X, конец и начало которых находятся в фиксированной точке $x\in X$. Доказывается теорема: Если алгебра когомологий пространства X, с коэффициентами в поле действительных чисел является внешней алгеброй с образующими $x_1, x_2, \ldots$ (в каждой размерности имеется лишь конечное число образующих), то алгебра когомологий пространства Ω по полю действительных чисел является алгеброй многочленов с образующими $\xi_1, \xi_2, \ldots$, причем $\dim \xi_i = \dim x_i - 1$. В заметке имеется неверное утверждение, что в случае, когда пространство Ω не имеет кручения, алгебра когомологий пространства Ω с целыми коэффициентами является алгеброй многочленов.

Примечание референта. Результаты заметки могут быть легко получены из одной теоремы Картана — Серра (Cartan H., Serre J.-P., C. r. Acad. sci., 1952, 234, 393—395). А. С. Шварц

8687. **Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей.** **Болтянский В. Г.**, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 47, 1—199

Обширное сочинение, посвященное изложению основных фактов теории гомологий и гомотопий. Изложение теории гомологий в ее классическом аспекте доведено, с одной стороны, до гомологической теории много-

образий, а с другой — до теории квадратов Стинрода. Из теории гомотопий изложены гомотопические группы (только абсолютные), теория препятствий (только для отображений в гомотопически простые пространства), многообразия Штифеля, теория векторных полей на многообразиях и теория второго препятствия для распространений непрерывных отображений и векторных полей. Доказательства многих известных теорем упрощены и усовершенствованы. По возможности автор всегда обращает внимание на геометрический смысл вводимых понятий. Однако некоторое пренебрежение к формальной стороне теории иногда затрудняет чтение работы. Имеется много опечаток (кроме указанных в списке опечаток) и не все утверждения сформулированы достаточно корректно (см. например, лемму Шпернера на стр. 18). М. М. Постников

8688. **О гомотопии отображений полиэдра. Пуппе** (Zur Homotopie von Abbildungen eines polyeders. Puppe Dieter), Math. Z., 1954, **61**, № 3, 303—323 (нем.)

Строится своеобразная теория препятствий, которая применяется затем к решению некоторых конкретных гомотопических вопросов.

Пусть K — связное симплициальное разбиение, Y — линейно связное пространство и $y_0 \in Y$. Пусть далее F — такое отображение n-мерного остова клеточного разбиения $K \times I$ в Y, что $F(K^n \times 0 \cup K^n \times 1 \cup K^0 \times I) = y_0$. Тогда препятствие к продолжению этого отображения на $(n+1)$-мерный остов имеет вид $c^n(F) \times I$, где $c^n(F)$ — некоторый n-мерный коцикл разбиения K по области коэффициентов $\pi_n(Y, y_0)$. Совокупность всех получаемых таким образом коциклов обозначается через C^n_*. Она является подгруппой группы n-мерных коциклов и содержит все кограницы. Естественный образ этой подгруппы в группе когомологий $H^n = H^n(K, \pi_n(Y))$ обозначается через H^n_*. Основные свойства группы H^n_* следующие.

Теорема 1. При $n > 1$ отображение $f: K^n \to Y$, являющееся $(n-1)$-постоянным (т. е. переводящее остов K^{n-1} в точку y_0), тогда и только тогда гомотопно нулю, когда $\bar{d}(f) \in H^n_*$, где $\bar{d}(f)$ — класс гомологий n-мерной различающей отображения f и постоянного отображения.

Теорема 2. Если пространство Y гомотопически просто в размерности n $(n > 1)$, то соответствие $f \to \bar{d}(f)$ индуцирует взаимно однозначное отображение совокупности гомотопических классов $(n-1)$-постоянных отображений $f: K^n \to Y$ в фактор-группу H^n / H^n_*; если при этом размерность разбиения K не превосходит $n+1$, то это отображение происходит на всю группу H^n / H^n_*.

Теорема 3. Пусть Ω — пространство петель в Y, а $h: \pi_n(Y) \to H_{n-1}(\Omega)$ — композиция гомоморфизмов Гуревича: $\pi_n(Y) \approx \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$; пусть далее $\tilde{h}: H^n(K, \pi_n(Y)) \to H^n(K, H_{n-1}(\Omega))$ — соответствующий гомоморфизм групп когомологий; тогда группа H^n_* принадлежит ядру гомоморфизма $\tilde{h}$.

Если K есть ориентированное n-мерное многообразие, то $H^n(K, \pi_n(Y)) \approx \pi_n(Y)$, и можно считать, что гомоморфизм $\tilde{h}$ совпадает с h. Автор доказывает (теорема 4), что для любого элемента α, принадлежащего ядру гомоморфизма h, можно найти такое ориентируемое K, что для этого многообразия имеет место включение $\alpha \in H^n_*$. Аналогичные результаты справедливы (после приведения по модулю 2) для неориентируемых многообразий. Приведены также некоторые другие результаты, получающиеся применением развитой теории препятствий. В. Г. Болтянский

8689. **О гомотопической теории отображений полиэдров в сферу. Пуппе** (Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders in eine Sphäre. Puppe Dieter), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 246—247 (нем.)

Краткое сообщение. Утверждается, что отображение n-мерного ориентируемого псевдомногообразия в m-мерную сферу, отображающее все симплексы псевдомногообразия, кроме одного, в точку, существенно, если отображение на этом симплексе определяет элемент гомотопической группы $\pi_n(S^m)$, имеющий бесконечный порядок. Сформулированы и другие предложения аналогичного характера (реф. 8688). М. М. Постников

8690. **Относительные абгомотопические группы. Иноуэ** (On abhomotopy group in relative case. Inoue Yoshiro), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 9, 841—845 (англ.)

Относительная (m, n)-абгомотопическая группа $\varkappa^m_n(Y, Y_0, y_0)$ пространства Y относительно подпространства Y_0 с начальной точкой $y_0 \in Y_0$ $(m \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$ определяется автором как m-мерная гомотопическая группа пространства отображений $(E^n, s^{n-1}) \to (Y, Y_0)$ (рассматриваемого в компактно открытой топологии) с начальной точкой, являющейся постоянным отображением $E^n \to y_0$. Показано, что эта группа является полупрямой суммой групп $\pi_{m+n}(Y, Y_0, y_0)$ и $\pi_m(Y_0, y_0)$. Для $m > 1$ эта сумма прямая, а для $m = 1$ эта сумма тогда и только тогда прямая, когда пара (Y, Y_0) является $(n+1)$-простой. М. М. Постников

8691. **Некоторые заметки об абгомотопических группах. Иноуэ** (Some remarks on abhomotopy groups. Inoue Yoshiro), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 2, 60—65 (англ.)

Пусть Y — линейно связное пространство. Через Y^{S^l} обозначим пространство отображений $f: S^l \to Y$ $(l \geqslant 1)$ с компактно-открытой топологией. Через $Y_0^{S^l}$ обозначим ту линейную компоненту пространства Y^{S^l}, которая содержит отображение $k_{y_0}: S^l \to y_0$, где $y_0 \in Y$. Группу $\pi_m(Y_0^{S^l})$, следуя Ху, обозначают через $k^{m+l}_{m-l}(Y)$ и называют абгомотопической группой (Hu S. T., Ann. Math., 1947, **48**, 717—734).

Автор сводит изучение абгомотопических групп к изучению гомотопических групп довольно простых расслоенных пространств. Среди других теорем доказывается формула $k^{m+l}_{m-1}(Y) \approx \pi_{m+l}(Y) + \pi_m(Y)$.

Аналогично изучаются относительные абгомотопические группы, определенные ранее автором (реф. 8690). С. С. Рышков

8692. **Произведение Уайтхеда и инвариант Хопфа. Тода** (Le produit de Whitehead et l'invarian tde Hopf. Toda Hirosi), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 14, 849—850 (франц.)

Утверждается, что гомотопические группы $\pi_{n+14}(S_n)$ и $\pi_{n+15}(S_n)$ имеют следующие значения (см. таблицу на стр. 30).

Поскольку группы $\pi_{29}(S_{15})$ и $\pi_{30}(S_{16})$ не изоморфны, то из теоремы Фрейденталя следует, что не существует отображения $S_{31} \to S_{16}$ с хопфовским инвариантом 1. Поэтому не существует, например, алгебры с делением ранга 16 над полем действительных чисел.

n	$\pi_{n+14}(S_n)$	$\pi_{n+15}(S_n)$
3	Z_{30}	Z_{30}
4	$Z_{1512}+Z_2+Z_{30}$	Z_{30}
5	Z_6+Z_2	$Z_{30}+Z_2$
6	$Z_{12}+Z_2$	$Z_{60}+Z_{18}$
7	$Z_{24}+Z_4$	$Z_{120}+Z_2+Z_2+Z_2$
8	$Z_{240}+Z_{24}+Z_4$	$Z_{120}+Z_2+Z_2+Z_2+Z_2+Z_2$
9	$Z_{16}+Z_4$	$Z_{240}+Z_2+Z_2+Z_2$
10	$Z_{16}+Z_2$	$Z_{240}+Z_2+Z_2$
11	$Z_{16}+Z_2$	$Z_{240}+Z_2$
12	$Z_{16}+Z_2+Z_{12}$	$Z_{240}+Z_2$
13	$Z_{16}+Z_2$	$Z_{480}+Z_2$
14	Z_8+Z_2	$Z_{480}+Z_2$
15	Z_4+Z_2	$Z_{480}+Z_2$
16	Z_2+Z_2	$Z_{480}+Z_2+Z$
$\geqslant 17$	Z_2+Z_2	$Z_{480}+Z_2$

М. М. Постников

8693. Об одном типе аналитических косых произведений. Накано (On a certain type of analytic fiber bundles. Nakano Shigeo), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 542—547 (англ.)

Пусть V — компактное комплексно-аналитическое многообразие, а $\mathfrak{B}$ — аналитическое (с аналитическими координатными функциями) косое произведение над V, слоем которого является комплексная аффинная прямая, а группой — группа неоднородных аффинных преобразований. Пусть далее $\mathfrak{A}$ — косое произведение над V, координатные преобразования которого получаются из координатных преобразований произведения $\mathfrak{B}$ отбрасыванием неоднородных членов. В работе установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех косых произведений $\mathfrak{B}$ с одним и тем же $\mathfrak{A}$ и проективным пространством над линейным пространством гомологий дифференциальных форм типа (0,1) с коэффициентами в $\mathfrak{A}$. В случае, когда многообразие V является алгебраической кривой, показано, что построенное соответствие совпадает с соответствием, рассмотренным Вейлем. М. М. Постников

8694. О комплексно-аналитических расслоенных пространствах с разрешимым слоем. Френкель (Sur les espaces fibrés analytiques complexes de fibre résoluble. Frenkel Jean), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 1, 16—18 (франц.)

Полученные ранее результаты (РЖМат, 1953, 129) обобщаются на случай, когда X является произведением многообразия Штейна и некоторых комплексных проективных (или аффинных с выколотой точкой) пространств. М. М. Постников

См. также: 8622, 8623, 8632 Д, 8648, 8799, 8828, 8940, 8946, 9081

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

8695. О продолжении конечноаддитивной меры (которая может быть неархимедовой) с конечноаддитивной алгебры Буля на более широкую алгебру. IV. Продолжение меры в общем случае. Никодим (Sur l'extension d'une mesure (qui peut être non archimédienne), simplement additive sur une tribu de Boole simplement additive à une autre tribu, plus étendue. IV. Extension de mesure dans le cas général. Nikodým Otton Martin), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 7, 864—866 (франц.)

Теорема, доказанная в предыдущей заметке автора (РЖМат, 1956, 6496), распространяется на общий случай, когда линейно упорядоченное тело (Ф) не предполагается полным в указанном там смысле. Значения продолженной меры μ' лежат теперь в некотором расширении тела (Ф). Реферируемая заметка посвящена построению этого расширения, притом главным образом логическим вопросам, связанным с этим построением. В. А. Рохлин

8696. Обобщенные градиенты Фикера и Де-Джорджи. Пок (Considérations sur les gradients généralisés de G. Fichera et E. De Giorgi. Pauc Chr.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **40**, 183—192 (франц.)

Для ограниченной борелевской функции f на E_τ, меры μ и числа $\lambda > 0$ Де-Джорджи определяет средние $W_\lambda f = f_\lambda$ (РЖМат, 1955, 5696), порождающие векторные меры $\mathbf{F}^\lambda$. При гипотезе Де-Джорджи (конечность предела полных вариаций этих мер при $\lambda \to 0$) $\mathbf{F}^\lambda$ слабо сходятся к векторной мере $\mathbf{F}$ (градиентная мера для f). Изучается взаимосвязь этой гипотезы с гипотезой Фикера (конечность полной вариации векторной функции интервала $\mathbf{F}^*(I)$ (Fichera G., Lezioni sulle transformazioni lineari, vol. I., Inst. mat. Univ. Trieste, 1954). П. И. Романовский

8697. Интегрирование и отыскание примитивной относительно произвольной непрерывной функции. Каччопполи (L'integrazione e la ricerca delle primitive respetto ad una funzione continua qualunque. Caccioppoli Renato), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **40**, 15—34 (итал.)

Для всякой функции $\varphi(x)$, непрерывной на $[a, b]$ и непостоянной ни на каком интервале, известным образом вводятся понятия нижней и верхней производных (в случае их совпадения — производной) какой-либо функции $F(x)$ относительно $\varphi(x)$. Обобщая классическую теорию интеграла Лебега — Стилтьеса, автор вводит понятие интеграла $\int f\, d\varphi$ (φ, вообще говоря, имеет бесконечную вариацию), причем предварительно рассматриваются понятия множества меры нуль относительно $\varphi(x)$, абсолютной непрерывности относительно $\varphi(x)$ и т. д. и устанавливается ряд теорем, сходных с классическими. Основную роль при этом играет понятие образующей последовательности $\varphi^{(n)}(x)$, для $\varphi(x)$. Далее определяется тотализация относительно $\varphi(x)$ и рассматриваются вопросы, относящиеся к понятию примитивной относительно $\varphi(x)$. П.И. Романовский

8698. Замечание о средних действительных функций. Чеймберлин (Remark on the averages of real functions. Chamberlin R. E.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, Suppl. № 1, 663—668 (англ.)

Приводится пример непрерывно дифференцируемой функции, для которой при каждом x существует такое (сколь угодно малое) $t > 0$, что справедливо равенство

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\, ds, \qquad (1)$$

а функция не является линейной. Известно, что из ра-

венства (1), если оно справедливо при любых x и t, удовлетворяющих условию $a \leqslant x - t < x + t \leqslant b$, следует линейность функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$ (Beckenbach E. F., Reade M. O., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 53, 230—238).

Доказывается теорема: Если при каждом $x \in (a, b)$ существует такое $t > 0$, что (1) справедливо, и, кроме того, $f'(x)$ абсолютно непрерывна, то $f(x)$ — линейная функция. Ф. И. Харшиладзе

8699. **О квадрируемости одного вида линейчатых поверхностей в смысле Лебега. Ельцов А. И.,** Науч. зап. Мелитопольск. ин-та механиз. и электрифик. с. х., 1955, № 2, 211—216

Рассматривается вопрос о квадрируемости линейчатых поверхностей вида:

$$x = v f_1(u), \quad y = v f_2(u), \quad z = f_3(u)$$
$$(0 \leqslant v \leqslant 1, \quad \alpha \leqslant u \leqslant \beta).$$

Функции f_1, f_2, f_3 непрерывны и неотрицательны; проекции на плоскости координат направляющей кривой ($v = 1$) квадрируемы и не имеют двойных точек. Доказывается, что необходимым и достаточным условием квадрируемости данной поверхности в смысле Лебега является ограниченность полной вариации функций $f_1(u)/f_2(u)$ и $f_3(u)$. В статье имеются опечатки и некоторые неточности в изложении. А. С. Кованько

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

8700. **Формулировка гипотезы континуума в терминах теории фильтров. Брунс, Шмидт** (Eine filtertheoretische Formulierung der Kontinuumhypothese. Bruns Günter, Schmidt Jürgen), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, 1, № 2, 91—92 (нем.)

Критерий несчетного бесконечного множества, полученный авторами в предыдущей работе (РЖМат, 1956, 4393), распространяется с небольшим изменением способа на случай множеств мощностей $\aleph_1$ и $\aleph_{\alpha+1}$, что приводит к формулировке гипотезы континуума и обобщенной гипотезы континуума в терминах развиваемой авторами теории фильтров. З. И. Козлова

8701. **О трансфинитных заключениях. Сэки** (On transfinite inferences. Seki Setsuya), Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, 4, № 1, 43—45 (англ.)

С помощью логики предикатов первой ступени в гёделевской теории множеств просто доказывается эквивалентность следующих предложений: 1) аксиома выбора, 2) лемма Цорна, 3) теорема сравнения, 4) теорема Цермело.

Предложения 1,3,4 хорошо известны, предложение 2 утверждает, что всякое непустое индуктивное множество содержит максимальный элемент. Индуктивным называется всякое частично упорядоченное множество, для любого упорядоченного подмножества которого существует элемент, следующий за (или совпадающий с) каждым элементом этого подмножества.

Термин «трансфинитное заключение» употребляется в статье для обозначения всякой схемы заключения, эквивалентной аксиоме выбора. Б. С. Содномов

8702. **О новом критерии сохранения класса Бэра. Мошан** (Sur un nouveau critère de conservation de classe de Baire. Motchane Léon), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 5; 605—608 (франц.)

Приводятся необходимые и достаточные условия неповышения класса (по классификации Бэра) при применении операции предельного перехода $f = \lim_{k \to \infty} f_k$ к функциям f_k класса $\leqslant \alpha$. Указывается метод построения функции класса $\alpha + 1$, отправляясь от функций класса α. В. Я. Арсенин

8703. **Непротиворечивость проективной оценки некоторых неэффективных множеств. Содномов Б. С.,** Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 155—158

Используя метод П. С. Новикова (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, 279—316), автор доказывает теорему:

Пусть $\{S\}$ — семейство множеств, для которого существует универсальное проективное множество. Непротиворечиво утверждение, что среди множеств, конструируемых применением аксиомы выбора к системе $\{S\}$, имеется проективное множество.

Отсюда вытекает, что неизмеримое множество в примере Ван-дер-Вардена (получаемое выбором по одной точке из каждого класса рациональностей), а также множества хаусдорфова разбиения сферы можно без противоречия считать проективными множествами не выше третьего класса. А. С. Есенин-Вольпин

8704. **О функциях, определяемых при помощи трансфинитной индукции. Тугуэ** (Sur les fonctions qui sont définies par l'induction transfinie. Tugué Tosiyuki), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 2, 93—122 (франц.)

Пользуясь трансфинитной инукцией, Куратовский и Нёйман доказали (Kuratowski C., Neumann J. von, Ann. Math., 1937, 38, 521—525), что поверхность Лебега S, с помощью которой Лебег показал существование функций $f(x)$, не входящих в классификацию Бэра, является множеством типа A_ρ. Автор доказывает, что, используя свойства теоретико-множественной операции Хаусдорфа для функций, можно получить такую же оценку дескриптивной природы множества S. В. Я. Арсенин

8705. **О накрытии множеств. Козлова З. И.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 2, 125—132

Даются обобщения теоремы А. А. Ляпунова о возможности накрытия R_α-множеств (или $R_{\alpha\beta}$-множеств) $\{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ таких, что каждая точка множества $R_{\{N\}}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$, где N — жесткая база R^α-операции, есть точка N-однозначности таблицы $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$, BR_α-множествами (или $BR_{\alpha\beta}$-множествами) $H_{n_1 \ldots n_k}$ такими, что каждая точка множества $R_{\{N\}}(\{H_{n_1 \ldots n_k}\})$ есть точка N-однозначности таблицы $\mathcal{E}' = \{H_{n_1 \ldots n_k}\}$.

Вводятся понятия точки N—p-значности и точки N-конечнозначности последовательности множеств.

Определяются операции Φ_{N^*}, $\Phi_{[Np]^*}$ и $\Phi_{[Np]^*n}$ и рассматриваются свойства этих операций, на основе которых и доказывается утверждение о накрытии R_α-множеств, аналогичное теореме Ляпунова и отличающееся от нее только тем, что вместо точек N-однозначности в нем фигурируют точки N — p-значности.

Такое же утверждение относительно R_α-множеств $E_{n_1 \ldots n_k}$ таких, что каждая точка множества $R_{\{N\}}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$ является точкой N-конечнозначности таблицы $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$, получено на основе рассмотрения свойств $\Phi_{N^{**}}$-операций и $\Phi_{N^{**}n}$-операций. Р. Ю. Мацкина

8706. **О множествах, эффективно отличных от всех Ф-множеств. Крейнин Я. Л.,** Матем. сб., 1956, 38, № 2, 129—148

Метрическое пространство R называется λ-пространством, если, какова бы ни была δs-операция Ф, в пространстве R существует $C\Phi$-множество, отличное

от всех Ф-множеств этого пространства. Показывается, что существует λ-пространство, не содержащее в себе дисконтинуума (приводится неэффективное построение такого пространства). Далее вводятся понятия: а) множества T_Φ, эффективно отличного от всех Ф-множеств пространства R; б) эффективного λ-пространства, — и доказываются следующие теоремы:

I. Для того чтобы метрическое пространство R было эффективным λ-пространством, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало в себе дисконтинуум.

II. Для того чтобы при всякой δs-операции Ф существовало множество T_Φ, эффективно отличное от всех множеств метрического пространства R, необходимо и достаточно, чтобы R содержало в себе дисконтинуум.

Пусть R — метрическое пространство.

Доказывается равносильность следующих утверждений:

1. При любой δs-операции Ф существует расположенное в R множество T_Φ, эффективно отличное от всех Ф-множеств пространства R.

2. При любой δs-операции Ф существует $C\Phi$-множество пространства R, эффективно отличное от всех Ф-множеств этого пространства.

3. Пространство R содержит в себе дисконтинуум.

4. Пространство R эффективно-несчетно.

В. Я. Арсенин

8707. О некоторых проблемах дескриптивной теории множеств. Новиков П. С., Келдыш Л. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 34

Тезисы обзорного доклада.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

8708. Ортогональные и биортогональные системы функций. Козлов В. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 27—28

Тезисы обзорного доклада.

8709. Тригонометрические ряды. Бари Н. К., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 25—26

Тезисы обзорного доклада.

8710. Выпуклое тело Каратеодори. Баяда (Il corpo convesso di Carathéodory. Baiada Emilio), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 75—85 (итал.)

Выпуклым телом Каратеодори K_n называется наименьшее выпуклое тело в евклидовом пространстве S_{2n}, содержащее замкнутую кривую с уравнениями

$$x_l = \cos l\theta,\ y_l = \sin l\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi;\ l = 1, \ldots, n).$$

Пусть $f(x)$ — функция периода 2π с ограниченным изменением на $(0, 2\pi)$, принимающая в точках разрыва значения, заключенные между ее пределами слева и справа, и пусть a_l, b_l $(l = 1, \ldots, n)$ — ее первые $2n$ коэффициентов Фурье, причем $a_0 = 0$. Каратеодори (Carathéodory C., Rend. Circolo mat. Palermo, 1911, 32, 193—217) нашел условия для того, чтобы такая функция была неотрицательной. Эти условия автор в своей предыдущей работе (РЖМат, 1956, 4420) формулирует в таком виде: для того чтобы $f(x)$, удовлетворяющая предыдущим условиям, была неотрицательна, необходимо и достаточно, чтобы при всяком n точка $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ лежала внутри выпуклого тела Каратеодори K_n.

В реферируемой статье рассматривается счетномерное евклидово пространство S_∞ с точками $A = (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$, и телом Каратеодори K называется совокупность тех точек A, для которых при любом n точка $A_n = (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ лежит внутри K_n.

При сохранении прежних условий регулярности, наложенных на $f(x)$, и $a_0 = 1$, для того чтобы $f(x) \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы точка S_∞ с координатами $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ принадлежала телу K.

Автор ставит себе целью ввести такую метрику в S_∞, чтобы можно было говорить о внутренних и граничных точках тела K, причем внутренние точки K должны характеризовать строго положительные функции. Если пользоваться метрикой гильбертова пространства, то это не удается. Введя соответствующим образом понятие расстояния, автор показывает, что точка из S_∞, соответствующая непрерывной функции с $a_0 = 1$ и строго положительной на $(0, 2\pi)$, лежит внутри K.

Кроме того, если непрерывная функция удовлетворяет условию $0 < f(x) < 1$ (значения 0 и 1 исключены), то соответствующая точка из S_∞ лежит строго внутри «сферы» с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Н. К. Бари

8711. О пределах последовательности частных сумм тригонометрических рядов. Меньшов Д., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 5, 777—780

Изучается вопрос: каково множество функций, являющихся пределами подпоследовательностей частных сумм некоторого тригонометрического ряда? При этом пределы рассматриваются в смысле сходимости почти всюду.

Функция $f(x)$ называется предельной в смысле сходимости почти всюду на E для множества M функций $\varphi(x)$, если существует последовательность $\varphi_m(x) \in M$ $(m = 1, 2, \ldots)$, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на E. При этом предполагается, что все $\varphi(x)$ определены почти всюду на E и могут принимать значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной внешней меры.

Множество $M = \{\varphi(x)\}$ называется замкнутым в смысле сходимости почти всюду на E, если любая предельная функция для M (в смысле сходимости почти всюду на E) принадлежит M. Пусть ряд $\Sigma_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ составлен из измеримых функций, конечных почти всюду на некотором измеримом множестве E. Функция $f(x)$ называется предельной для этого ряда на множестве E, если существует такая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, что частные суммы $S_{n_k}(x)$ этого ряда сходятся к $f(x)$ почти всюду на E.

Имеет место

Теорема 2. Пусть $E \subset [-\pi, \pi]$ измеримо. Для того чтобы множество $M = \{\varphi(x)\}$ было множеством всех предельных функций на E для некоторого тригонометрического ряда, необходимо и достаточно, чтобы M было замкнутым в смысле сходимости почти всюду на E.

Достаточность высказанного условия выводится как следствие из следующей более общей теоремы.

Теорема 5. Пусть $G(x)$ и $F(x)$ — измеримые функции, определенные почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и такие, что $G(x) \leqslant F(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$; $M = \{\varphi(x)\}$ — замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на некотором $E \subset [-\pi, \pi]$ и $G(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant F(x)$ почти всюду на E.

Тогда существует тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, для которого $G(x)$ и $F(x)$ являются нижним и верхним пределами по

мере его частных сумм (определения см. РЖМат, 1955, 668), и такой, что 1) $\varphi(x) \in M$ есть предельная функция этого ряда на множестве E и 2) если некоторая подпоследовательность $S_{n_k}(x)$ частных сумм ряда сходится на каком-то множестве $e \subset E$ к функции $f(x)$, то найдется последовательность функций $\varphi_m(x) \in M$ с $\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x) = f(x)$ почти всюду на e. Н. К. Бари

8712. Замечание к теореме Сяна. Синвхал (A note on a theorem of F. C. Hsiang. Sinvhal S. D.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1955, sér. 1, 69, № 2, 79—84 (англ.)

Пусть

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

— ряд Фурье функции $f(x) \in L(0, 2\pi)$ периода 2π и пусть $\Phi(t) \equiv \Phi_x(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]/2$, $\chi_\eta(t) = \int_0^t u^{-(1+\eta)}\Phi(u)\,du$, $\eta \geqslant 0$.

Известно, что сходимость интеграла $\chi_0(t)$ не достаточна для суммируемости ряда (1) методом $(C,1)$ (Prasad B. N., Math. Z., 1935, **40**, 496—502). Обобщая этот результат, Сян строил пример для доказательства того, что сходимость интеграла $\chi_\eta(t)$ недостаточна для суммируемости ряда Фурье методом $(C, 1-\varepsilon)$, $\varepsilon > \eta/(1+\eta)$ (Hsiang F. C., Duke Math. J., 1946, **13**, 43—50). Показывается, что упомянутый пример некорректен. И. И. Огиевецкий

8713. Обобщение одной теоремы В. Г. Челидзе. Жак И. Е., Сообщ. АН ГрузССР, 1955, **16**, № 2, 89—94

Обобщение одной теоремы В. Г. Челидзе. Жак (ვ. ჭელიძის ერთი თეორემის განზოგადების შესახებ. ჟაკი ი.), Საქ. სსრ მეცნ. აკად. მოამბე, 1955, **16**, № 2, 89—94 (груз.)

Пусть $f(x, y) \in L_2[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ — функция периода 2π по каждой переменной и пусть $\Delta_h f(x, y)_x = f(x+h, y) - f(x, y)$, $\Delta_{h,\eta} f(x, y) = f(x+h, y+\eta) - f(x+h, y) - f(x, y+\eta) + f(x, y)$,

$$\chi_1^{(2)}(\delta; f) = \sup_{|h|\leqslant\delta}\left\{\int_0^{2\pi} dx\left(\int_0^{2\pi}|\Delta_h f(x, y)_x|\,dy\right)^2\right\}^{1/2},$$

$$\chi_3^{(2)}(\delta_1, \delta_2; f) = \sup_{\substack{|h|\leqslant\delta_1\\|\eta|\leqslant\delta_2}}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Delta_{h,\eta} f(x, y)|^2\,dx\,dy\right\}^{1/2},$$

$$\chi_3(\delta_1, \delta_2; f) = \sup_{\substack{|h|\leqslant\delta_1\\|\eta|\leqslant\delta_2}}|\Delta_{h,\eta} f(x, y)|,$$

$$\chi_1^{(1)}(\delta; f) = \sup_{\substack{|h|\leqslant\delta\\0\leqslant x\leqslant 2\pi}}\int_0^{2\pi}|\Delta_h f(x, y)_x|\,dy.$$

Если сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\chi_1^{(2)}\left(\frac{1}{m}; f\right), \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{mn}}\chi_3^{(2)}\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}; f\right)$$

или ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sqrt{\chi_1^{(1)}\left(\frac{1}{m}; f\right)}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{mn}\sqrt{\chi_3\left(\frac{1}{m}; \frac{1}{n}; f\right)},$$

то ряд Фурье функции $f(x, y)$ сходится абсолютно. Аналогичное имеет место, если исходить из разности $\Delta_h f(x, y)_y$.

Первая часть представляет собой обобщение результата В. Г. Челидзе (Докл. АН СССР, 1946, **54**, № 2, 117—120). А. Ф. Тиман

8714. Единственность канторовского типа для кратных тригонометрических интегралов. Шапиро (Cantor-type uniqueness of multiple trigonometric integrals. Shapiro Victor L.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 4, 607—622 (англ.)

Пусть $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства E_n. Положим $(u, x) = \sum_1^n u_i x_i$, $|u| = (u, u)^{1/2}$.

Пусть $D_n(x, r)$ — n-мерная сфера радиуса r с центром в точке x.

Изучается единственность кратных тригонометрических интегралов

$$\int_{E_n} e^{i(x, u)}\,c(u)\,du, \qquad (1)$$

где $c(u)$ — комплексная функция, интегрируемая в каждой ограниченной области.

По определению, интеграл (1) суммируем (C, α) по сферам в точке x к $L(x)$, если при $R \to \infty$

$$\sigma_R^{(\alpha)}(x) = 2\alpha R^{-2\alpha}\int_0^R I_r(x)\,(R^2 - r^2)^{\alpha-1} r\,dr \to L(x),$$

где $\alpha > 0$, $I_r(x) = \int_{D_n(0,\,r)} e^{i(x, u)}\,c(u)\,du$.

Справедлива теорема: Пусть Z — замкнутое множество емкости нуль. Если 1) интеграл (1) почти всюду суммируем $(C, 1)$ по сферам к нулю; 2) $\overline{\lim}_{R\to\infty}|\sigma_R^{(1)}(x)| < \infty$, когда $x \in E_n - Z$; 3) $c(u)(|u|^2+1)^{-1}$ интегрируемо на E_n, — то почти всюду $c(u) = 0$. А. Г. Джваршейшвили

8715. Абсолютная и равномерная сходимость рядов Фурье почти периодических функций. Купцов Н. П., Науч. ежегодник за 1954 г. Саратовск. ун-т, Саратов, 1955, 653—655

Приводятся без доказательств четыре теоремы об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти периодических функций.

1. Пусть

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x} \qquad (1)$$

— равномерная почти периодическая функция, удовлетворяющая условиям: а) показатели Фурье Λ_n имеют конечное число предельных точек $b_1, \ldots, b_s$, причем ни одна из них не совпадает с Λ_n; б) существует постоянная C такая, что для всякого n можно найти j $(1 \leqslant j \leqslant s)$, при котором $|\Lambda_n - b_j| \leqslant Cn^{-1}$; (в $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}\sqrt{\omega(n^{-1})} < \infty$, где

$$\omega(\delta) = \max_{j=1,\ldots,s} M_x\left\{\left|\int_0^{\infty} e^{-(\delta - ib_j)t} f(x-t)\,dt\right|^2\right\}$$

Тогда ряд (1) сходится абсолютно.

2. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям а) и б) предыдущей теоремы и условию в'): при $\delta \to 0$

$$\delta M_x\left\{\left|\int_0^{\infty} e^{-(\delta - ib_j)t} f(x-t)\,dt\right|^2\right\} = o(1).$$

Тогда ряд (1) сходится равномерно на всей числовой прямой

3. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям: а') существует постоянная $C > 0$ такая, что $\Lambda_n > Cn$ для всех натуральных n; б') $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^{-1}\omega(n^{-1})} < \infty$, где $\omega(\delta) = \sup_{|h|\leqslant\delta} M_x\{|f(x+h) - f(x)|^2\}$. Тогда ряд (1) сходится абсолютно.

4. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию а') предыдущей теоремы и условию б'): вариация функции $f(x)$ на отрезке (a, b) не превосходит $B(b-a)$, где B — некоторая константа. Тогда ряд (1) сходится равномерно на всей числовой прямой. Б. М. Левитан

8716. **Некоторые задачи чебышевской школы в свете современных функционально-аналитических методов. Вороновская Е. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 26
Тезисы доклада.

8717. **Замечание о полиномах акад. С. Н. Бернштейна. Жидков Г. В.,** Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1955, № 1, 31—33

Доказывается теорема: Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x) \in M \operatorname{Lip} \alpha$, то $|B_n'(f, x) - f'(x)| < M\,[3/(4n)]^{\alpha/2}$, где $B_n(f, x)$ — полином Бернштейна функции $f(x)$.

Примечание референта. Подобный результат (с несколько иной константой) является непосредственным следствием теоремы Каца и Поповича (Kac M., Popoviciu T., Studia math., 1938, 7) и результатов, изложенных в книге И. П. Натансона «Конструктивная теория функций» (М.-Л., 1949, стр. 252—253). См. также работу референта (Наук. зап. Львівск. ун-ту, 1947, 5, № 1). И. Г. Соколов

8718. **Об односторонних приближениях функций многочленами. I. Фрейд** (Über einseitige Approximation durch Polynome. I. Freud Géza), Acta scient. math., 1955, 16, № 1-2, 12—28 (нем.)

Основой работы служит следующая теорема Г. Вейля, с успехом примененная им к вопросам распределения чисел по модулю 1 и имеющая со своими обобщениями и ряд других применений: пусть функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана на отрезке (a, b); тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие многочлены $p(x)$ и $P(x)$, что $p(x) \leqslant f(x) \leqslant P(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ и $\int_a^b [P(x) - p(x)]\,dx < \varepsilon$.

Эта теорема была обобщена в различных направлениях Фейером и Сегё и в этом обобщенном виде оказалась применимой к вопросам простых и взвешенных механических квадратур, а также к оценке остаточных членов в теоремах тауберова типа.

Основная теорема: Пусть K_ν — класс функций $f(x)$, для которых $(\nu-1)$-я производная служит на отрезке (a, b) интегралом некоторой функции $f_\nu(x)$ с конечной полной вариацией U_ν. Если $f(x) \in K_\nu$, то существуют такие многочлены $p_N(x)$ и $P_N(x)$ степени не выше N, что $p_N(x) \leqslant f(x) \leqslant P_N(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ и

$$\int_a^b [P_N(x) - p_N(x)]\,\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} < \frac{A_\nu U_\nu}{N^{\nu+1}},$$

где число A_ν зависит только от ν (для этой зависимости в статье даются числовые оценки).

Указываются применения этой теоремы к оценке некоторых механических квадратур, а также остаточных членов некоторых тауберовых теорем (см. теорему 2 реф. 8719). Для ряда частных случаев дается оптимальное решение задачи. А. Я. Хинчин

8719. **Односторонние L_1-приближения и их применение к теоремам тауберовского типа. Фрейд Геза,** Докл. АН СССР, 1955, 102, № 4, 689—691

Обобщаются прежние результаты автора (Acta math. Acad. sci. hung., 1952, 3, 299—307; РЖМат, 1954, 5159), относящиеся к оценке остаточного члена в тауберовой теореме Харди и Литлвуда.

Теорема 2. Пусть $\tau(t)$ — неубывающая функция на $(0, \infty)$ и преобразование Лапласа-Стилтьеса $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,d\tau(t)$ сходится для $\operatorname{Re} s > 0$. Пусть

$$F(s) = As^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)\,[1 + O\{R(s)\}] \quad (s \to +0),$$

где $\alpha \geqslant 1/2$, а $R(s)$ — монотонно возрастающая функция, $R(0) = 0$ и $R(ks) < e^{ck} R(s)$ $(k = 2, 3, \ldots;$ c не зависит от s и $k)$.

Тогда

$$\int_0^\infty f(e^{-t/x})\,e^{-t/x}\,d\tau(t) = Ax^\alpha \left[\int_0^1 (\log y^{-1})^{\alpha-1} f(y)\,dy + O\left\{\left[\log \frac{1}{R(1/x)}\right]^{-m-1}\right\}\right] \quad (x \to \infty),$$

где $f(x)$ — произвольная функция класса K_m на $[0, 1]$ (реф. 8718). Доказательство этой теоремы основано на теореме (теорема 1), сформулированной в реф. 8718.

Дается набросок доказательства теоремы 1. Чтение работы затрудняется обилием опечаток и неточностей. Так, теорема 2 сформулирована неточно (неточности исправлены в реферате). На стр. 690, строка 2 сверху, должно быть: $x_{kn} = -\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$; на этой же странице, строка 6 снизу, должно быть:

$$p_{2n-1}(x) = (x-\xi)^m \varphi_n(x),$$

$$P_{2n-1}(x) = (x-\xi)^m \Phi_n(x) + c_1 n^{-m} \omega_n(x).$$

Б. И. Коренблюм

8720. **Приближение функций многих переменных полиномами. Никольский С. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 33—34
Тезисы доклада.

8721. **Некоторые результаты о приближении функций посредством многочленов и целых функций. Ибрагимов И. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 124
Тезисы доклада.

8722. **О сходимости интерполяционного процесса Лагранжа по узлам, близким к чебышевским. Егорова И. А.,** Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, 103, 139—150

Пусть внутри промежутка $[-1, 1]$ взята система узлов интерполирования: $-1 < x_{nn} < x_{n-1,n} < \ldots < x_{1n} < 1$. Положим $x_{n+1,n} = -1$, $x_{0n} = 1$; $\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_{kn})$; $N_k = \max |\omega_n(x)|$ при $x \in [x_{k+1,n}, x_{kn}]$. Узлы x_{kn} предполагаются обладающими свойством:

$$M_1 < N_k/N_i < M_2, \qquad (1)$$

где $i, k = 0, 1, \ldots, n$; $n = 1, 2 \ldots$; M_1, M_2 — положительные абсолютные постоянные. Используя результаты Эрдёша (Erdös P., Ann. Math., 1942, 43, 59—64), автор для константы Лебега $\lambda_n = \max_{[-1,1]} \sum_{k=1}^n |l_{kn}(x)|$ интерполяционного процесса Лагранжа с узлами x_{kn}, обладающими свойством (1), доказывает оценку

$$\lambda_n = O(\log n), \qquad (2)$$

из которой обычным образом следует равномерная сходимость интерполяционного процесса для каждой непрерывной функции, удовлетворяющей условию Дини — Липшица. (Оценка (2) для аналогичной системы узлов получена Армстронгом (РЖМат, 1955, 4967). *Реф.*).

Со ссылкой на работу автора (Докл. АН СССР, 1949, 64, № 4, 445—447) указывается, что для интерполяционного процесса Лагранжа по узлам, обладающим свойством (1), имеет место во всех точках $[-1, 1]$ принцип локализации среди функций, интегрируемых (R). В. Ф. Николаев

8723. **Абсолютная и равномерная сходимость рядов Фурье по ортонормальным системам. К у п ц о в Н. П.**, Науч. ежегодник за 1954 г. Саратовск. ун-т, Саратов, 1955, 651—652

Рассматриваются (ρ, p)-системы функций $\varphi_n(x)$, определенных на $[a, b]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

А. Функции φ_n образуют полную ортонормальную на $[a, b]$ систему с весом $\rho(x)$, причем ρ суммируем, неотрицателен на $[a, b]$ и почти всюду отличен от нуля на $[a, b]$.

Б. φ_n и $p\varphi_n'$ абсолютно непрерывны на $[a, b]$; p и $\{(p\varphi_n')_x'\}^2/\rho(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и p неотрицательна на $[a, b]$.

В. $\omega_{nm} = \int_a^b \rho\varphi_n'\varphi_m' dx$. Существуют $C > 0$ и целое число N такие, что $\omega_{nn} > Cn^2$ для $n \geqslant N$.

Г. Существует такая постоянная M, что при любом n

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=n+1}^{\infty}\omega_{mk}^2/\omega_{kk} \leqslant M.$$

Д. $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$.

Утверждается, что собственные функции уравнений

$$d(py_x')/dx - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0,$$

$$d(py_x')/dx - q(x)y(x) + \int_a^b k(x, t)y(t)\,dt + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \quad (1)$$

при некоторых ограничениях на функции p, q, ρ и k, более широких, чем те, при которых выводятся асимптотические формулы, образуют (ρ, p)-систему.

Формулируется без доказательства ряд теорем относительно (ρ, p)-систем, являющихся обобщением теорем относительно тригонометрических систем.

Например, если φ_n ограничены в совокупности на $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, f имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то частные суммы ряда Фурье по φ_n ограничены в совокупности на $[\alpha, \beta]$. Если же сверх того f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) = f(b) = 0$, то ряд Фурье сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$.

Принцип локализации для некоторых (ρ, p)-систем не имеет места.

Примечание референта. Отсутствие принципа локализации для ортогональных полиномов, удовлетворяющих первому из уравнений (1) и не ограниченных в совокупности на отрезке $[a, b]$, хорошо известно. Этот принцип имеет место, если на функцию f наложено дополнительное условие $\rho f^2 \in L_2[a, b]$. Неизвестно, при каком дополнительном условии относительно f принцип локализации является справедливым для всех (ρ, p)-систем. Б. М. Гагаев

8724 Д. **О теореме единственности для кратных тригонометрических рядов. Ч ж э н М и н ь - д э** (On the uniqueness theorem of multiple trigonometrical series. C h e n g M i n - T e. Doct. diss., Princeton Univ., 1949), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 3, 423—424 (англ.)

8725 Д. **Некоторые вопросы наилучших приближений почти периодических функций. Б р е д и х и н а Е. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1956

См. также: 8490, 8726, 8730, 8733, 8734, 8799, 8812, 8834, 8854, 8895, 8912, 8951, 8975

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

8726. **Некоторые множества точек, связанные с рядами Тейлора. Х е р ц о г, П и р а н я н** (Some point sets associated with Taylor series. H e r z o g F r i t z, P i r a n i a n G e o r g e), Michigan Math. J., 1955—1956, 3, № 1, 69—75 (англ.)

Доказывается, что для любого множества E типа F_σ на окружности $C(|z| = 1)$ можно построить степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, сходящийся в каждой точке этого множества и такой, что последовательность его частных сумм $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ и, больше того, последовательность $B_k(S_n(z))$, где $\{B_k\}$ — заданная последовательность регулярных преобразований Теплица, для любого k неограничена в каждой точке множества $C \setminus E$. Если, сверх того, множество E имеет меру 2π, то вышеназванный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ может быть сконструирован таким, что $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Показано также, что для любого множества E типа F_σ на отрезке $I = [0; 2\pi]$ можно построить ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$, сходящийся в каждой точке этого множества и такой, что последовательность его частных сумм неограничена в каждой точке множества $I \setminus E$. Если, сверх того, множество E имеет меру 2π, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ может быть таким, что $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

Н. А. Давыдов

8727. **О степенных рядах, расходящихся всюду на границе круга сходимости. Д в о р е ц к и й, Э р д ё ш** (On power series diverging everywhere on the circle of convergence. D v o r e t z k y A., E r d ö s P.), Michigan Math. J., 1955—1956, 3, № 1, 31—35 (англ.)

Доказывается, что если последовательность комплексных чисел $\{b_n\}$ удовлетворяет двум условиям: $|b_n| \geqslant |b_{n+1}|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 = \infty$, то можно построить степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, расходящийся всюду на окружности $|z| = 1$ и такой, что a_n равно b_n или 0 для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Указаны следствия этого предложения. Н. А. Давыдов

8728. **Дальнейшая заметка о рядах Тейлора с пропусками. Н о б л** (A further note on Taylor series with gaps. N o b l e M. E.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 2, 220—228 (англ.)

Как и в предыдущей заметке (РЖМат, 1953, 677) рассматривается вопрос о сходимости подпоследовательности частных сумм ряда Тейлора в точках границы круга сходимости при тех или иных условиях. Доказывается теорема (обозначения введены в вышеуказанном реферате): Пусть ряд $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости, равный единице, и $f(z)$ регулярна в окрестности $|z - z_0| < \delta$ точки z_0, $|z_0| = 1$. Если

$\lim_{k\to\infty}(N_k-n_k)/\varphi(N_k)\geqslant A(\delta)>0$, то тогда $S_{n_k}(z_0)=\Sigma_0^{nk}a_m z_0^m\to f(z_0)$ при $k\to\infty$. Более того, имеется постоянная $c=c(\delta)<1$ такая, что

$$|S_{n_k}(z_0)-f(z_0)|=O(c^{N_k-n_k}).$$

Следующая теорема касается случая, когда $f(z)$ не обязательно регулярна в точке z_0: Пусть $f(z)$ регулярна в области $S: |z-1|<\delta_0$, $|\arg(z-1)|>\theta_0$, $0<\theta_0<\pi/2$, и непрерывна в $\bar{S}$. Если $\varphi(N_k)=o(N_k-n_k)$, то тогда $\Sigma_0^{n_k}a_p\to f(1)$ при $k\to\infty$. Последняя теорема обобщает теорему Гайера (РЖМат, 1954, 2557), утверждающую, что если в указанных условиях на $f(z)$ имеем $a_n=o(1)$, то тогда $\Sigma_0^{\infty}a_n=f(1)$.

А. Ф. Леонтьев

8729. **О единственности рядов по многочленам Фабера.** Суетин П. К., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 3, 423—425

Рассматриваются ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z) \qquad (1)$$

по многочленам Фабера для ограниченного континуума K с односвязным дополнением. Доказаны две теоремы, приводящие к таким следствиям. Из обращения в нуль суммы $f(z)$ ряда (1) вытекает обращение в нуль всех его коэффициентов в следующих двух случаях: 1) K — произвольный континуум указанного типа и ряд (1) сходится равномерно к нулю на K; 2) K — представляет замыкание конечной односвязной области G с жордановой границей, $a_n=O(\varepsilon_n/n)$, где ε_n таковы, что ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2/n$ сходится и ряд (1) внутри G сходится к нулю.

С. Я. Альпер

8730. **Метрические признаки полноты полиномов при взвешенном приближении на бесконечных кривых.** Джрбашян М. М., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 5, 713—716

Приводятся формулировки ряда общих предложений о взвешенных полиномиальных приближениях на бесконечных кривых более общей природы. Пусть бесконечная кривая L разбивает плоскость z на конечное число односвязных неограниченных областей G_j ($j=1,2,\ldots,m$), содержащих некоторый угол с раствором π/α_j ($j=1,2,\ldots,m$). Отнесем к классу $L_2[p(z)]$ все определенные и измеримые функции $f(z)$, для которых

$$\int_L e^{-p(z)}|f(z)|^2\,d\sigma(z)<+\infty,$$

и к классу $C[p(z)]$ все определенные и непрерывные на L функции, для которых

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty\\ z\in L}} e^{-p(z)}f(z)=0,$$

где $p(z)\geqslant p_0(|z|)$ при $z\in L$ и $|z|\geqslant r_1$, а $p_0(r)$ — вещественная функция, заданная на полуоси $[a,+\infty)$, представимая в виде

$$p_0(r)=p_0(a)+\int_a^r\frac{\omega(t)}{t}\,dt \quad (r\geqslant a>0),$$

где $\omega(t)$ определена на полуоси $[a,+\infty)$, не убывает и $\lim_{t\to+\infty}\omega(t)=+\infty$.

Теорема 1. Если

$$\int^{\infty}\frac{p_0(r)}{r^{1+\omega}}\,dr=+\infty,\quad \omega=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{\alpha_j\}, \qquad (1)$$

тогда: 1) для любой функции $f(z)\in L_2[p(z)]$

$$\inf_{\{Q\}}\int_L e^{-p(z)}|f(z)-Q(z)|^2d\sigma(z)=0; \qquad (а)$$

2) для любой функции $f(z)\in C[p(z)]$

$$\inf_{\{Q\}}\max_{z\in L}e^{-p(z)}|f(z)-Q(z)|=0, \qquad (б)$$

где $\{Q\}$ — всевозможные полиномы. Автор дает следующие обобщения теоремы 1:

I. В случае, когда кривая $L=C_1+C_2$, где кривые C_k: $\theta=\varphi_k(r)$ ($k=1,2$), $a\leqslant r\leqslant\infty$, $-\pi<\varphi_1(r)<\varphi_2(r)<\pi$ и функции непрерывны и дифференцируемы при $r\geqslant a$, топологически эквивалентна всей оси $(-\infty,+\infty)$.

Теорема 2. Пусть сходятся интегралы $\int^{\infty}|d(r\varphi_k'(r))|$ ($k=1,2$) и для $\theta(r)=\varphi_2(r)-\varphi_1(r)$

$$0<\lambda_1<\liminf_{r\to+\infty}\theta(r)\leqslant\limsup_{r\to+\infty}\theta(r)<\lambda_2<2\pi.$$

Если

$$\int^{\infty}\frac{p_0(r)}{r}\exp\left[-\pi\int_{r_1}^{r}\frac{du}{u\theta(u)}\right]dr=+\infty$$

и

$$\int^{\infty}\frac{p_0(r)}{r}\exp\left[=\pi\int_{r_1}^{r}\frac{du}{u(2\pi-\theta(u))}\right]dr=+\infty,$$

то система полиномов полна на L в классах функций $L_2[p(z)]$ и $C[p(z)]$ в смысле (а) и (б) соответственно. II. В случае, когда удаляющиеся в бесконечность ветви представимы непрерывными функциями $y=\varphi_k(x)$ ($k=1,2$), $x\geqslant x_0$, $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$, имеющиеся непрерывные производные $\varphi_k'(x)$ и $\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_k(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\varphi_k'(x)=0$, тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Пусть сходятся интегралы

$$\int_{x_1}^{\infty}|d\varphi_k'(x)|,\ \int_{x_1}^{\infty}\frac{\varphi_k'^2(x)}{\theta(x)}\,dx\ (k=1,2),$$

где $\theta(x)=\varphi_2(x)-\varphi_1(x)$.

Если: а) $\liminf_{x\to+\infty}\theta(x)>0$ и функция $p_0(r)$ удовлетворяет условию

$$\int^{\infty}p_0(r)\exp\left[-\pi\int_{r_1}^{r}\frac{du}{\theta(u)}\right]\frac{dr}{\theta(r)}=+\infty, \qquad (2)$$

а при б) $\liminf_{x\to+\infty}\theta(x)=0$, кроме (2), выполняется также дополнительное условие

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{p_0(r)}\int_{r_1}^{r}\frac{du}{u\theta(u)}=0,$$

то система полиномов полна на L в классах функций $L_2[p(z)]$ и $C[p(z)]$. Отметим, что эти признаки полноты являются точными.

А. П. Тамадян

8731. **Спектральная теория операторов некоторого вида в пространстве аналитических функций.** Евграфов М. А., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 4, 625—627

Доказывается, что интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}K(z,\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta,\ r<1, \qquad (1)$$

где

$$K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n z^n}{\zeta^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{n,k}\frac{z^{k+n}}{\zeta^{n+1}},$$

$\lambda_n\neq\lambda_m$ при $n\neq m$, $\lambda_n\to 0$, $|\varepsilon_{n,k}|<\varepsilon_n(1+\delta_n)$, $\varepsilon_n\to 0$, $\delta_n\to 0$, имеет собственные числа λ_n и собственные функции $\varphi_n(z)=z^n\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{(n)}z^m$, $n=0,1,\ldots$, аналитические в единичном круге, коэффициенты которых определяются из рекуррентных соотношений

$$(\lambda_n-\lambda_{n+m})\,a_m^{(n)}=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{n+k,m-k}a_k^{(n)},\quad a_0^{(n)}=1.$$

Сопряженное с (1) уравнение имеет те же собственные числа и собственные функции $\psi_n(\zeta)=\Sigma_{m=0}^{n}\frac{b_m}{\zeta^{n-m+1}}$, где $(\lambda_n-\lambda_{n-m})\,b_m^{(n)}=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{n-k-1,k+1},b_k^{(n)},b_0^{(n)}=1$. Системы функций $\{\varphi_n(z)\}$ и $\{\psi_n(z)\}$ биортогональны. При выполнении дополнительных довольно жестких, но близких к точным, ограничений, система $\{\varphi_n(z)\}$ образует базис в пространстве аналитических функций в круге $|z|<r$, $r<1$, а система $\{\psi_n(z)\}$ — в пространстве функций, аналитических в $|\zeta|>r$, $r<1$.

М. Г. Хапланов

8732. О функциональном уравнении $E(f)=\Sigma_0^p Ai\,f(x+\omega_i)=0$. Гермэнеску (Asupra ecuaţiel funcţionale $E(f)=\Sigma_0^p A_{if}(x+\omega_i)=0$. Ghermănescu M.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 3, 499—502 (рум.; рез. русс., франц.)

Продолжение предыдущей заметки автора (РЖМат, 1955, 2167). Пусть k — кратность корня $z=0$ характеристического уравнения $\Sigma_0^p A_i e^{\omega_i z}=0$ и $G_n^k(x)$ — полином, удовлетворяющий уравнению $E(f)=\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ (полиномы $G_n^k(x)$ имеют то значение, что в виде ряда по ним можно искать решение неоднородного уравнения $E(f)=g(x)$, если известно разложение $g(x)$ в ряд Тейлора). Строится решение $G_n^k(x)$ однородного уравнения, совпадающее на $[0,\omega_p]$ с полиномом $G_n^k(x)$. После этого указывается схема решения следующей задачи: требуется найти решение $f(x)$ однородного уравнения, совпадающее на $[0,\omega_p]$ с заданной функцией $g(x)$. Такое решение предлагается искать в виде $f(x)=\Sigma\frac{g_n}{n!}G_n'^k(x)$, если $g(x)=\Sigma\frac{g_n}{n!}G_n^k(x)$.

А. Ф. Леонтьев

8733. О скорости полиномиальных приближений на произвольных совокупностях. Шагинян А. Л., Изв. АН АрмССР, 1955, 8, № 3, 1—31 (рез. арм.)

Первая часть статьи, касающаяся оценок функций Грина и аппроксимации обыкновенными многочленами на замкнутых ограниченных совокупностях, содержит развернутое изложение результатов автора, опубликованных без доказательства (РЖМат, 1956, 6519). Во второй части рассматриваются весовые полиномиальные приближения функций, регулярных на неограниченных замкнутых или открытых множествах. Приведем один из относящихся сюда результатов. Пусть Ω — односвязная неограниченная область, внутри которой находится точка $z=0$, а Ω_r — максимальная ее конечная часть, отсекаемая дугами окружности $|z|=r$ и содержащая эту точку. Если $d(r)=\max_{z\in\Omega_r}|z|$, функция $f(z)$ аналитична в $\bar{\Omega}$, $\delta(r)$ — величина, характеризующая минимальное расстояние особой точки $f(z)$ до Ω_r, $M_{\frac{\delta(r)}{2}}$ есть $\max|f(z)|$ по всем z, расстояние которых до Ω_r не превышает $\delta(r)/2$ и при $\gamma>2$, $\ln M_{\frac{\delta(r)}{2}}<\exp\beta\left[\frac{d(r)}{\delta(r)}\right]^{\gamma}$, то существует последовательность обыкновенных многочленов $P_n(z)$ степени n таких, что

$$\exp\left\{-\exp\alpha\left[\frac{d(z)}{\delta(z)}\right]^{\gamma}\right\}|f(z)-p_n(z)|<$$
$$<M_{\delta(r)/2}\exp\{-n\exp c(\ln n)^{2/\gamma}\},$$

где для некоторого значения a, r определяется из условия

$$\frac{d(r)}{\delta(r)}=a(\ln n)^{1/\gamma},$$

c — абсолютная константа, а $\beta<\alpha$. Показатель степени $2/\gamma$ в правой части этой оценки в известном смысле понижен быть не может.

А. Ф. Тиман

8734. К вопросу о единственности многочлена наилучшего приближения в метрике пространства L_1. Хавинсон С. Я., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 6, 1159—1161

Рассматривается задача приближения в пространстве $L_1(\mu,E)$ функций $\omega(x)$, комплекснозначных измеримых и суммируемых по неотрицательной мере μ, на измеримом (μ) множестве E метрического пространства; $\|\omega\|=\int_E|\omega(x)|\,d\mu$. Обобщаются результаты Д. Джексона и М. Г. Крейна об условиях единственности многочлена, наименее уклоняющегося в метрике обычного пространства L_1 от непрерывной функции, на случай пространства $L_1(\mu,E)$, причем рассматривается приближение функций из определенного автором класса T, содержащего, кроме непрерывных функций, еще и функции, допускающие разрывы определенного рода. Установив необходимые и достаточные условия существования в линейном многообразии $H\subset L_1(\mu,E)$ (вообще говоря, не конечномерном) функции $\varphi^*(x)$, наименее уклоняющейся от данной функции $\omega(x)\in L_1(\mu,E)-\overline{H}$, автор приводит основную теорему.

Теорема 3. Пусть $H=\{\varphi(x)\}$ — линейное многообразие, состоящее из непрерывных функций, $\overline{H}\neq L_1(\mu,E)$. Для того чтобы для каждой функции $\omega(x)\in T$ функция $\varphi^*(x)\in H$, реализующая $\inf_{\varphi\in H}\|\omega-\varphi\|$, была единственной (если она существует), необходимо и достаточно, чтобы не существовало никакого замкнутого в E множества F, $\mu(E-F)>0$, обладающего следующими свойствами: а) найдется функция $\varphi(x)\in H$, обращающаяся в нуль на F и только на F; б) найдется функция $\alpha(x)$, $|\alpha(x)|\leqslant 1$ почти везде; $\alpha(x)=\pm\frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$, $x\in E-F$, причем на каждой компоненте $E-F$ знак сохраняется; $\int_E\alpha(x)\varphi(x)\,d\mu=0$ для любой $\varphi(x)\in H$. Из теоремы 3 следует

Теорема 4. Если H состоит из функций, множества нулей которых не разбивают E, то для любой $\omega(x)\in T$ функция $\varphi^*(x)\in H$ наилучшего приближения в метрике $L_1(\mu,E)$ единственна.

Приводится несколько частных случаев заданий множества E, меры μ и линейного многообразия H. Отмечается, что свойство системы $u_1(x),\ldots,u_m(x)$ быть системой Чебышева не является необходимым для обеспечения единственности многочлена наилучшего приближения.

С. И. Зуховицкий

8735. Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечно-связных областях. Хавинсон С. Я., Матем. сб., 1955, **36** (78), № 3, 445—478.

Автор рассматривает конечную n-связную область G, полную спрямляемую границу которой обозначает через Γ; он решает экстремальную задачу о нахождении

$$\sup \left| \int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx \right|,$$

где $\omega(x)$ — заданная на Γ функция, а верхняя грань берется по всем функциям $f(x)$, аналитическим в G и принадлежащим некоторым классам; в частности, рассмотрены такие классы: B, если $|f(z)| < M < \infty$, $z \in G$; E_p являющийся обобщением класса E_p для односвязных областей; $B_{\rho(x)}$, если $f(z) \in B$ и $|f(z)| \leqslant \rho(z)$ почти всюду на Γ, причем $0 < m \leqslant \rho(z) \leqslant M$ почтивсюду на Γ; $E_{\rho(x),q}$, $q > 1$, если $f(z) \in E_q \int_\Gamma |f(x)/\rho(x)|^q \leqslant ds \leqslant 1$.

Автор широко пользуется двойственностью в решении экстремальной задачи, вытекающей из того, что

$$\|l\|_F = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |l(f)| = \inf_{m \in \mathfrak{M}} \|l - m\|,$$

где F — некоторое линейное многообразие, входящее в линейное пространство E типа (B); $l(f)$ — произвольный функционал над E, $\mathfrak{M}$ — множество всех линейных функционалов $m(f)$, обращающихся в нуль для $f \in F$.

Из результатов автора получаются как частные случаи результаты Ландау, Саса, Рогозинского, Макинтайра, Голузина и референта. Список литературы (23 названия) является неполным; нет указания на весьма интересную и важную статью М. Г. Крейна «L-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве» (Ахиезер Н., Крейн М. «О некоторых вопросах теории моментов», Харьков, 1938), где установлена двойственность в решении экстремальных задач; нет также указаний на работы японских математиков Такаги, Такенака и Какейя; эти работы и другие, имеющие прямое отношение к рассматриваемым вопросам, указаны в статье референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, **12**, 325—336).

Я. Л. Геронимус

8736. По поводу одной леммы из конформного отображения. Гербер (Sur un lemme de représentation conforme. Gerber Robert), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 21, 1440—1441 (франц.)

Пусть D — ограниченная односвязная область в плоскости z с площадью σ и границей Γ, являющейся кривой Жордана; α_1, α_2, α_3, α_4 — ее четыре граничных элемента в циклическом порядке. Отобразим область D на верхнюю полуплоскость $\mathscr{T} = t + i\tau$ так, чтобы точке α_i соответствовала бы точка t_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, вещественной оси плоскости $\mathscr{T}$. Пусть $r = \dfrac{(t_4 - t_3)(t_2 - t_1)}{(t_4 - t_2)(t_3 - t_1)}$, Λ — кратчайшая длина линий, лежащих в D и соединяющих дуги $\overset{\frown}{\alpha_2\alpha_3}$ и $\overset{\frown}{\alpha_4\alpha_1}$ границы Γ. Ирон (Huron R., Ann. Fac. sci Univ. Touluse sci. math. et sci. phys., 1951, **15**, № 4, 155—160) доказал, что

$$\frac{\Lambda^2}{\sigma} \leqslant \frac{\pi}{\ln r^{-1}} \quad (0 \leqslant r \leqslant 1). \tag{1}$$

Автор приводит элементарное доказательство этого неравенства, основанное на выводах Лере (Leray M., Comment. math. helv., 1936, **8**, 173), используя идею введения вспомогательной плоскости, почерпнутую им при чтении мемуара Дженкинса (РЖМат, 1956, 5814), усилившего оценку (1). Автор утверждает, что его рассуждения применимы к областям более общего вида, чем односвязная, и с границами худшими, чем кривые Жордана.

Примечание референта. В работе имеются опечатки. Именно, в правых частях неравенств, приведенных на стр. 1440, $\ln 1/r$ должен быть не множителем, а делителем.

Я. С. Фельдман

8737. О теореме Л. Лихтенштейна. Варшавский (On a theorem of L. Lichtenstein. Warschawski S. E.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 1, 835—839 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть C — замкнутая кривая Жордана, расположенная в плоскости z, обладающая углом $\pi\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2$, с вершиной в точке $z = 0$. Предположим, что этот угол образован двумя регулярными аналитическими дугами: γ_a: $z = A(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu$ и γ_b: $z = B(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu t^\nu$; $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если $\zeta = f(z)$ отображает область Δ, ограниченную кривой C, на полуплоскость $I\zeta > 0$ так, что $f(0) = 0$, тогда для каждого целого n

$$\lim_{z \to 0} \left\{ z^{(n-1)/\alpha} \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right\} = c\,\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{\alpha} - n + 1\right),$$

где $c = \lim_{z \to 0} [f(z)\, z^{-1/\alpha}]$. Ранее эта теорема была доказана Лихтенштейном для случая α иррационального.

Б. Н. Рахманов

8738. Об однолистных функциях, близких к выпуклым. Рид (On close-to-convex univalent functions. (Reade Maxwell O.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 1, 59—62 (англ.)

Рассматривается класс функций, близких к выпуклым, введенный Капланом. Функция $f(z)$, регулярная в $|z| < 1$, по определению, является функцией, близкой к выпуклым, тогда и только тогда, если $f'(z) \neq 0$ и если существует однолистная выпуклая в $|z| < 1$ функция $\varphi(z)$ такая, что в $|z| < 1$ $\operatorname{Re}\{f'(z)/\varphi'(z)\} \geqslant 0$. Этот класс функций Рид обозначает через K. Получены следующие результаты: 1) Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in K$, то $|a_n| \leqslant n\,|a_1|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Оценки точные. 2) Пусть D — замкнутый круг, лежащий в $|z| < 1$. Если $f(z) \in K$, то существует функция $\varphi_0(z)$, отображающая D на выпуклую область, такая, что $\operatorname{Re}\{f'(z)/\varphi_0'(z)\} \geqslant 0$ в D. Далее автор вводит класс функций, названный им классом функций, близких к звездным, и обозначенный через K^*. По определению, функция $f(z)$, регулярная в $|z| < 1$, является функцией, близкой к звездным, тогда и только тогда, если $f(z) \neq 0$ при $z \neq 0$ и если существует однолистная звездная в $|z| < 1$ функция $\Psi(z)$ такая, что $\operatorname{Re}\{f(z)/\Psi(z)\} \geqslant 0$ в $|z| < 1$. Функции класса K^*, вообще говоря, неоднолистны. Классы K и K^* связаны между собой так же, как классы выпуклых и звездных функций. Доказано:

1. Если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_1 \neq 0)$ регулярна в $|z| < 1$ и $f(z) \neq 0$ при $z \neq 0$, то $f(z) \in K^*$ тогда и только тогда, если неравенство

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left\{ re^{i\theta}\,\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} d\theta \geqslant -\pi$$

имеет место при любых θ_1 и θ_2, $\theta_1 < \theta_2$, и при всех r, $0 \leqslant r < 1$. 2. Если $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in K^*$, то $|a_n| \leqslant n^2$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Оценки точные.

Референтом независимо рассмотрены более общие классы аналитических функций. (РЖМат, 1956, 4443, 6529). Ю. Д. Максимов

8739. Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге. Лебедев Н. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 3—21

Используя и развивая известный метод параметрических представлений, основанный на аппроксимации тех или иных классов регулярных и однолистных в $|\zeta|<1$ функций интегралами уравнения Лёвнера, автор дает полное решение ряда экстремальных задач теории однолистных функций. Определены область значений системы $\left(\alpha,\ \ln\frac{f(z)}{z}\right)$, $|z|<1$, в классе S_1 однолистных в $|\zeta|<1$ функций $f(\zeta)=\alpha\zeta+\alpha_2\zeta^2+\ldots$, для которых $|f(\zeta)|<1$, области G значений $\ln\frac{zf'(z)}{f(z)}$, $\ln\frac{\alpha z^2 f'(z)}{f(z)^2}$, $\ln\alpha f'(z)$ в классе $S_1[|f(z)|]$ однолистных в $|\zeta|<1$ функций, для которых $|f(\zeta)|<1$ и $|f(z)|$ в фиксированной точке z задан. Из этих результатов получены различные другие оценки. Отметим, что в последней из указанных задач область G не определяется неравенством, получаемым из уравнения Левнера, но автору удалось определить ее как выпуклую оболочку части множества точек границы области G. При указании экстремальных функций существенную роль играет определение уравнения Лёвнера, которому они удовлетворяют. П. П. Куфарев

8740. Некоторые свойства однолистных отображений круга и кругового кольца функциями специальных классов. Дундученко Л. Е., Изв. Киевск. политех. ин-та, 1955, **18**, 148—172

В §§ 1—3 рассматриваются функции подкласса класса ограниченных звездных в круге $|z|<1$ функций, определяемого структурной формулой

$$f(z)=z\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln F_\alpha(ze^{-i\theta})\,d\mu(\theta)\right\}=$$
$$=z+\sum_{n=2}^{+\infty}c\,z^k, \qquad (1)$$

где

$$F_\alpha(\zeta)=\frac{1}{2}\left(1-\zeta+\sqrt{1-2\zeta\cos\alpha+\zeta^2}\right),\ 0<\alpha<\pi,$$

$\mu(\theta)$ — неубывающая на $[-\pi;\pi]$, $\mu(-\pi)=\mu(-\pi+0)=0$, $\mu(\pi)=2\pi$. При $\alpha\to 0$ из (1) получается структурная формула класса звездных в круге $|z|<1$ функций. В § 2 выводятся оценки для $|f'(z)|$ в классе (1), совпадающие с оценками, найденными Р. Неванлинной для $|f'(z)|$ в классе всех ограниченных звездных в круге $|z|<1$ нормированных функций. Это можно было бы предвидеть, заметив, что экстремальная функция Р. Неванлинны

$$f_0(z)=zF_\alpha^{-2}(z)$$

содержится также в классе (1). В § 3 устанавливаются точные оценки для модулей двух первых коэффициентов c_2 и c_3 функций класса (1), а именно:

$$|c_2|\leqslant 1+\cos\alpha\ (0\leqslant\alpha\leqslant\pi),$$
$$|c_3|\leqslant\begin{cases}\frac{1}{4}(5\cos^2\alpha+6\cos\alpha+1)\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\\ \frac{1}{4}(1-2\cos\alpha-3\cos^2\alpha)\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\pi\right).\end{cases}$$

В § 4 доказана теорема: Экстремумы аргумента регулярных однолистных звездных в кольце $0<q<|z|<1$ функций $f(z)$ реализует в каждой точке этого кольца функция этого же класса

$$f_0(z)=-\sqrt{q}\left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}\right)^2\left[\wp\left(\frac{1}{2\pi i}\ln(ze^{-i\gamma})\right)-e_3\right],$$

где $\wp$ — «p-функция» Вейерштрасса, а γ — некоторая вещественная постоянная. На основании этой теоремы с помощью теоремы Александера о связи между классом звездных и классом выпуклых в круге или кольце функций получается аналогичная теорема об экстремумах аргумента производной в классе выпуклых в кольце $0<q<|z|<1$ функций (теорема «вращения»). В работе имеются опечатки. В. А. Зморович

8741. К теории кратно-однолистных функций. Тырковский В. А., Изв. Киевск. политех. ин-та, 1955, **18**, 195—204.

Доказывается одна теорема о функциях $f(z)$, регулярных и однолистных вместе со своей производной $f'(z)$ в круге $|z|<1$ и нормированных разложением вида

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\ldots$$

Эти функции автор называет функциями класса K или кратно однолистными, отмечая, что они встречаются, например, в теории разрывных плоских потоков несжимаемой невязкой жидкости.

Теорема. Для каждой функции $f(z)\in K$ имеет место неравенство $|a_3/a_2|\leqslant 4/3$, в котором знак равенства достигается функциями вида

$$f_0(z)=\int_0^z\left[1+\frac{2a\zeta}{(1-\zeta)^2}\right]d\zeta\in K. \qquad (1)$$

где a — вещественная постоянная, удовлетворяющая условию $0<a\leqslant 2/(\pi-2)$.

Доказательство проводится при помощи анализа семейства линий уровня области отображения (1). В формулировке теоремы не подчеркнуто, что других экстремальных функций, помимо указанных в теореме, не существует. В. А. Зморович

8742. Об уравнении типа Левнера для многосвязных областей. Куваев М. Р., Куфарев П. П., Уч. зап. Томского у-та, 1955, № 25, 19—34

Пусть B_0 — некоторая $p+1$-связная однолистная область плоскости z, содержащая $z=0$ и ограниченная кривыми $\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_p$, образы которых на сфере Римана являются жордановыми кривыми, и C — жорданова дуга: $z=\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, все точки которой за исключением принадлежащей Γ_0 точки $z=\varphi(0)$, лежат в B_0. Обозначим через $z=\Phi(w,t)$, $\Phi(0,t)=0$, $\Phi'_w(0,t)>0$, функцию, конформно отображающую круг $|w|<1$ на область B_t, получаемую из B_0 проведением разреза по части C_t: $z=\varphi(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, $t\leqslant T$ кривой C. Функция $\Phi(w,t)$ автоморфна относительно некоторой группы A_t дробно-линейных преобразований S_n^t круга $|w|<1$ в себя, порожденной конечным числом преобразований $T_1,T_2,\ldots,T_p$. Пусть произвольное преобразование S_n^t группы A_t имеет вид

$$S_n^t w=e^{i\beta_n(t)}(w-\alpha_n(t))/(1-\overline{\alpha_n(t)}\,w)\quad(n=1,2,\ldots).$$

Обозначим точки на $|w|=1$, соответствующие при отображении $|w|<1$ на B_t функцией $z=\Phi(w,t)$ концу $z=\varphi(t)$ разреза C_t, через $\mu_n(t)$ $(n=0,1,2,\ldots)$. При соответствующей нумерации преобразований S_n^t будем иметь

$$\mu_n(t)=e^{i\beta_n(t)}(\mu_0(t)-\alpha_n(t))/(1-\overline{\alpha_n(t)}\,\mu_0(t)).$$

Обозначим

$$\delta_0(t) = [1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n(t)|^2)^2 / |\mu_0(t) - \alpha_n(t)|^4]^{-1},$$
$$\delta_n(t) = \delta_0(t)(1 - |\alpha_n(t)|^2)^2 / |\mu_0(t) - \alpha_n(t)|^4.$$

Функция $\Phi(w, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + w \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(t) \frac{\mu_n(t) + w}{\mu_n(t) - w} \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0.$$

При этом функции $\alpha_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\alpha_m}{dt} = \alpha_m \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \frac{\mu_n + \alpha_m}{\mu_n - \alpha_m},$$

а функции $\beta_m(t)$ $(m = 1, 2 \ldots)$ — уравнениям

$$\frac{d\beta_m}{dt} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \operatorname{Im} \frac{\mu_n^2}{(\mu_n - \alpha_m)^2}.$$

Н. А. Лебедев

8743. Об экспериментальном осуществлении конформного отображения при помощи электролитической ванны. Кастаньо (Sulle trasformazioni conformi eseguite sperimentalmente con la vasca elettrica. Castagno Aldo), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952—1953, 87, № 1, 310—325 (итал.)

Исследуется при помощи метода электрогидродинамических аналогий поле скоростей при бесциркуляционном обтекании потоком идеальной жидкости профиля крыла аэроплана или решетки профилей. Описывается методика, позволяющая путем непосредственных измерений на электролитической модели определить модуль производной функции, конформно отображающей заданный профиль на круг, как для точек самого контура, так и для точек, лежащих вне контура.

В результате задача сводится к определению поля скоростей для кругового цилиндра. Для увеличения точности заданный профиль предварительно отображается при помощи функций Жуковского или Кармана — Треффца на область, близкую к кругу, которая и исследуется затем в электролитической ванне. Ванна, в плане прямоугольной формы (2,5 × 1,0 × 0,1 *м*), выполнена из бетона, покрытого внутри слоем парафина. Электролитом служит питьевая вода. Шины алюминиевые. Модель изготовляется из плексигласа. Для измерения потенциала в заданных точках контура по среднему сечению модели перпендикулярно к ее поверхности с заглублением на 3—4 *мм* устанавливаются платиновые проволоки (d= 0,4 *мм*), отвод потенциала от которых осуществляется столбиком ртути, залитой в вертикально просверленные отверстия.

Исследовались и другие материалы (медь, сталь, никель, серебро), но только платина дала хорошие результаты в связи с явлением поляризации, имеющим место по контакту металла с электролитом. Питание модели осуществлялось генератором звуковой частоты. Рабочее напряжение 6 *в*. Рабочая частота 800 *гц*. Для измерения применялась мостовая схема с трехступенчатым потенциометром, позволяющим определять потенциал с точностью до $1 \cdot 10^{-5}$ от приложенной к шинам разности потенциалов. Контрольными приборами являлись осциллограф и индикатор нуля фирмы General Radio, включенные параллельно в диагональ моста. Определена при помощи изложенного метода скорость вдоль профиля крыла аэроплана FIAT G 80 для 39 точек профиля. Сопоставление результатов с аналитическим решением показало, что расхождение не превышает 5%. П. Ф. Фильчаков

8744. Конформное отображение односвязных и двусвязных областей и определение постоянных Кристоффеля — Шварца при помощи математического прибора. Полжий Г. Н., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 1, 15—18

Рассматривается экспериментально-аналитический метод конформного отображения односвязных и двухсвязных областей и определения констант интеграла Кристоффеля — Шварца при помощи моделирования на электропроводной бумаге (РЖМат, 1956 5816)

Константы Кристоффеля — Шварца определяются следующим путем. Из однородной электропроводной бумаги вырезается многоугольник $A_1 A_2 \ldots A_n$, вдоль его сторон $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$ устанавливаются металлические шины и измеряется сопротивление R между ними. Из той же бумаги вырезается круг, на котором отмечаются точки a_1, a_2, a_3, выбранные в качестве образов точек A_1, A_2, A_3. Затем устанавливаются шины вдоль дуг $a_1 a_2$ и $a_3 a_м$ и точка $a_м$ подбирается таким образом, чтобы сопротивление между шинами равнялось той же величине R. Доказывается, что при выполнении этого условия $a_м = a_4$. Аналогично строятся точки a_5, a_6, ..., a_n.

При отображении односвязной области G на односвязную область G_1 при помощи того же метода сравнения сопротивлений устанавливается соответствие между n дискретными граничными точками областей. По найденным точкам строится приближенное значение отображающей функции во всех точках границы и при помощи формулы Коши результат распространяется на всю область. Двухсвязные области, если искомое отображение существует, приводятся к односвязным при помощи соответствующих разрезов вдоль линий токов, что выполняется тем же методом сравнения сопротивлений. Дается оценка погрешности рассматриваемого метода. Библ. 4 назв. П. Ф. Фильчаков

8745. Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двухсвязных областей и определение постоянных Кристоффеля — Шварца при помощи электрогидродинамических аналогий. Полжий Г. Н., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 4, 423—432

Развернутое изложение статьи автора. (реф. 8744). В отличие от Бредфилда, Гукера и Соусвелла (Bradfield, Hooker, Southwell, Proc. Roy. Soc., Ser. Math. and Phys. Sci., 1937, A159, № 898, 315—346), предложивших еще в 1937 г. для электромоделирования конформных отображений методом ортогональных траекторий, и от их последователей, автор предлагает новый экспериментально-аналитический метод конформных отображений — метод сравнения сопротивлений. Предварительно устанавливаются две вспомогательные леммы, на основании которых строится метод сравнения сопротивлений. При отображении произвольной односвязной области G на односвязную область G_1 этот метод позволяет установить соответствие между n граничными точками областей и распространить полученный результат при помощи формулы Коши на всю область. В случае двухсвязных областей метод позволяет определить, существует ли искомое отображение или нет и если существует, то задача приводится к рассмотренной выше при помощи разрезов вдоль соответствующих линий токов, которые строятся графически. Этот метод также позволяет исключительно просто находить постоянные Кристоффеля — Шварца в случае отображения круга на произвольный многоугольник. Рассматриваются примеры, в которых, к сожалению, не приведены числовые данные, показывающие удовлетворительную для многих технических задач точность. Для внутренних точек замкнутой области $D + C$, лежащей внутри односвязной области G, отображаемой

на односвязную область G_1, устанавливается оценка погрешности:

$$|\zeta(z)-\tilde{\zeta}(z)|<\frac{\delta l}{2\pi\eta},$$

где $\zeta(Z)$ — точная отображающая функция, $\tilde{\zeta}(Z)$ — приближенная отображающая функция, δ — максимальная абсолютная погрешность приближенных контурных значений $\tilde{\zeta}(t)$, l — длина контура L, η — наименьшее расстояние точек замкнутой области $D+C$ от границы L области G. Библ. 8 назв.

П. Ф. Фильчаков

8746. К вопросу о конформном отображении при помощи электромоделирования. Шаманский В. Е., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 1, 92—96

В существующих экспериментально-аналитических методах при построении функции, реализующей конформное отображение, некоторые характеристики отображения приходится определять либо путем подбора, либо путем графических построений, что вносит дополнительные погрешности. Предлагаемый метод свободен от этих недостатков и, не уступая по простоте методу ортогональных траекторий (РЖМат, 1956, 5815, 5816) и методу сравнения сопротивлений, (реф. 8745), гарантирует при определении соответствия граничных точек отображаемых областей требуемую точность, за исключением неустранимой погрешности самого электромоделирования. Пусть требуется построить функцию $w=f(z)$; $f(a_k)=b_k$ $(k=1, 2, 3)$, реализующую конформное отображение заданной односвязной области D на заданную односвязную область Δ, при котором точки a_1, a_2, a_3 границы области D переходят соответственно в точки b_1, b_2, b_3 границы Δ. Отобразим предварительно области D и Δ на полуполосу $0<\operatorname{Re}\zeta<1$, $\operatorname{Im}\zeta>0$. Пусть $\zeta=f_1(z)$, $\zeta=f_2(z)$, $\zeta=f_3(z)$ — функции, осуществляющие это отображение при следующем соответствии граничных точек:

$$\begin{array}{lll} f_1(a_1)=\infty, & f_1(a_2)=0, & f_1(a_3)=1, \\ f_2(a_1)=1, & f_2(a_2)=\infty, & f_2(a_3)=0, \\ f_3(a_1)=0, & f_3(a_2)=1, & f_3(a_3)=\infty, \end{array}$$

и пусть $\zeta=f_k^*(w)$ $(k=1, 2, 3)$ — аналогичные функции для области Δ. Обозначая через $w=g_k^*(\zeta)$ $(k=1, 2, 3)$ функции, обратные последним, в силу единственности конформного отображения при заданном соответствии трех граничных точек, имеем $w=f(z)=g_k^*[f_k(z)]$, $k=1, 2, 3$.

При помощи электроинтегратора, моделирующего уравнение Лапласа, строим вещественные части функций $f_k(z)$, $f_k^*(w)$, поскольку граничные условия для них известны. Замечая, что на дуге a_2a_3 функция $f_1(z)$, а на дуге b_2b_3 функция $f_1^*(\omega)$ вещественны, устанавливаем с помощью этих функций соответствие граничных точек дуг a_2a_3 и b_2b_3, так как $w=g_1^*[f_1(z)]\equiv f(z)$. Аналогично, пользуясь функциями $f_2(z)$, $f_2^*(w)$, $f_3(z)$, $f_3^*(w)$, строим соответствие точек дуг a_3a_1 и b_3b_1, a_1a_2 и b_1b_2. Таким образом устанавливается соответствие точек границ областей D и Δ, что принципиально и решает задачу. Излагается методика реализации описанного выше построения на электропроводной бумаге и приводится оценка погрешности, обусловленная отклонениями от точной реализации граничных условий, неизбежно возникающими при фактическом осуществлении этого способа. Анализ полученной оценки показывает, что она может быть сделана достаточно малой. Библ. 7 назв.

П. Ф. Фильчаков

8747. О решении некоторых задач Дирихле для двусвязных полигональных областей. Козырев И. И., Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 35—39

Используя формулу Н. И. Ахиезера (Элементы теории эллиптических функций, ГТИ, 1948, 179) для функции $z(w)$, отображающей кольцо $r<|w|<1$ на двусвязную полигональную область G, и распространяя результаты референта (Прикл. матем. и механика, 1937, 1, № 1, 43—76) на случай двусвязных областей, автор получает общее выражение (через квазипериодические σ-функции от аргумента $u=\frac{\omega}{\pi i}\ln w$) для μ-й производной от голоморфной в G и непрерывной в $\bar{G}$ функции, мнимая часть которой принимает на отрезках границы $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ области G значения, выражающиеся полиномами от длины дуги контуров Γ_1, Γ_2, степени не выше $\mu-1$.

П. П. Куфарев

8748. Краевая задача Римана для системы уравнений эллиптического типа. Михайлов Л. Г., Уч. зап. Тадж. ун-та, 1955, № 4, 19—28

Опираясь на результаты, полученные И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, **31** (73), № 2), автор дает решение следующей задачи: найти квазикусочноголоморфную функцию $U(z)$, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию:

$$U^+(t)=p(t)\,U^-(t)+g(t),$$

где $p(t)$, $g(t)$ — заданные на достаточно гладком контуре L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем $p(t)\neq 0$ всюду на L; $U^+(t)$ и $U^-(t)$ обозначают граничные значения $U(z)$ на L из внутренней и внешней по отношению L области.

Н. П. Векуа

8749. О структурных формулах теории специальных классов аналитических функций и некоторых их приложениях. Зверович В. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954, **15**, 126—148

Обзор исследований автора и других сотрудников кафедры высшей математики Киевского политехнического института. Даются в основном без доказательств представления различных классов однолистных и конечнолистных регулярных и мероморфных функций в круге и круговом кольце с помощью интегралов Стилтьеса. Опираясь на эти представления, удается решить ряд экстремальных задач в соответствующих классах. Перечисляются некоторые из таких задач. Приложен список литературы (19 наименований), содержащей доказательства результатов, перечисленных в обзоре.

Н. А. Лебедев

8750. О двух экстремальных проблемах для полиномов в единичном круге. Малхолланд (On two extremum problems for polynomials on the unit circle. Mulholland H. P.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 191—199 (англ.)

Пусть $\mathfrak{P}_n$ есть класс комплексных полиномов степени не выше n: $p(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n$ с вещественным c_0 и с $|\operatorname{Re}\{p(z)\}|\leqslant 1$ для $|z|\leqslant 1$. С помощью общей теории Рогозинского (РЖМат, 1955, 4347) доказываются две теоремы:

Теорема 1. Если $p(z)\in\mathfrak{P}_n$, то для $1\leqslant k\leqslant n$

$$|c_k|\leqslant\frac{2}{l}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l},\ \text{где}\ l=\left[\frac{n}{2k}+\frac{3}{2}\right]$$

Знак равенства имеет место, в частности, для полинома

$$\frac{1}{l^2}\sum_{r=1}^{l-1}(-1)^{r-1}z^{k(2r-1)}\left\{(2l-2r+1)\operatorname{ctg}\frac{(2r-1)\pi}{2l}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2l}\right\}$$

Теорема 2. Если $p(z) \in \mathfrak{P}_n$ и $\nu = \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right]$, то

$$|\operatorname{Im}\{p(z)\}| \leqslant \frac{2}{n+1}\sum_{r=1}^{\nu} \operatorname{ctg}\frac{(2r-1)\pi}{2n+2} \qquad (|z| \leqslant 1).$$

Указываются полиномы (различные для четного и для нечетного n), для которых в точке $r=1$ имеет место знак равенства. Ю. Е. Аленицын

8751. О модуле (функции) в одном классе аналитических функций. Ся Да о-син (一族解析函數的模數. 夏道行), 數學學報. Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1955, 5, № 4, 439—454 (кит.; рез. англ.)

Пусть L — класс функций $f(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$, регулярных в круге $|\zeta| < 1$ и таких, что для любых ζ_1 и ζ_2 из $|\zeta| < 1$ имеем $f(\zeta_1)\overline{f(\zeta_2)} \neq -1$. Опираясь на вариационный метод Г. М. Голузина, автор доказал теорему: Если $f(\zeta) \in L$, то для всякого z из $|z| < 1$ имеет место оценка

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z|}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Здесь знак равенства имеет место только для функции вида

$$f(\zeta) = \frac{\varepsilon\sqrt{1-|z|^2}\,\zeta}{1-\bar{z}\zeta},$$

где ε — произвольное фиксированное число такое, что $|\varepsilon| = 1$. Далее тем же методом в работе повторяется найденный ранее Дженкинсом (РЖМат, 1955, 4989) аналогичный результат для функций класса C. В работе получены и некоторые другие результаты. Н. А. Лебедев

8752. О существовании предельных значений результанта функций, принадлежащих классу H_δ, $0<\delta<1$, и некоторым другим классам аналитических функций. Дайович (Sur l'existence des valeurs limites de la résultante des fonctions, appartenant à la classe Hδ, $o<\delta<1$, et encore de certaines autres classes de fonctions analytiques. Daĭovitch Voĭn), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 21, 1441—1444 (франц.)

Автор пытается доказать следующую теорему: Пусть $f(z)$ и $g(z)$ определены рядами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad (1)$$

сходящимися в круге $|z| < 1$. Если в этом круге $f(z)$ принадлежит классу H_δ, $0 < \delta < 1$, а $\operatorname{Re} g(z)$ представима интегралом Пуассона — Стилтьеса, то $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ почти всюду на окружности $|z| = 1$ имеет угловые граничные значения.

Примечание референта. Эта теорема неверна. В самом деле, пусть

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ и } g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} z^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Функция $f(z)$ принадлежит всем классам H_δ, $0 < \delta < 1$ (Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950, стр. 95), ее коэффициенты Тейлора $a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \ln n + C + o(1)$, где C — постоянная Эйлера. Функция $g(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, поэтому $\operatorname{Re} g(z)$ представима в этом круге интегралом Пуассона — Лебега (и тем более представима интегралом Пуассона — Стилтьеса). Однако

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\frac{1}{k^{3/2}} z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln 2 + o(1)}{k^{1/2}} z^{2k}$$

почти всюду на окружности $|z| = 1$ не имеет даже радиальных граничных значений (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, стр. 123). Следуя методу автора, можно все же доказать следующую теорему: Пусть $f(z)$ и $g(z)$ определены рядами (1), сходящимися в круге $|z| < 1$. Если в этом круге $f(z)$ принадлежит классу H_1, а $\operatorname{Re}[g(z)]$ ограничена, то функция $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ ограничена в круге $|z| < 1$ (следовательно, $F(z)$ почти всюду на окружности $|z| = 1$ имеет угловые граничные значения). Пример, приведенный нами выше, говорит о том, что эта теорема точная. Н. А. Давыдов

8753. О мероморфных периодических функциях. Мюгель (Über meromorphe periodische Funktionen. Mügel Karl Wilhelm), Math. Nachr., 1955, **13**, № 3—4, 187—230 (нем.)

Изучаются мероморфные периодические функции с периодом 2π в случае, когда число нулей или полюсов в полосе периодичности бесконечно. Сначала показывается, что если $\{a_\nu\}$ — последовательность точек из полосы $-\pi < \operatorname{Re}(z) \leqslant \pi$ с конечным показателем сходимости, то имеется целая периодическая функция конечного порядка с нулями в $a_{\nu\mu} = a_\nu + 2\pi\mu$. Она представляется в форме обычного бесконечного произведения. Делается вывод, что показатель сходимости последовательности нулей (если таковые имеются) целой периодической функции $f(z)$ всегда равен порядку функции (для непериодических функций это не всегда имеет место). Если $f(z) \not\equiv A + Be^{i\pi z}$, то $f(z)$ все значения принимает одинаково часто.

Для изучения мероморфных периодических функций устанавливается основная формула (аналогичная известной формуле Неванлинна), выражающая $\ln|f(z)|$ через значения $f(z)$ на границе полосы $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant v$, ее нули и полюсы в этой полосе. Вводится основная характеристика $T(v, f)$ и с помощью ее доказывается теорема: Если $\int^{\infty} T(v, f)\, e^{-v} dv$ сходится, то тогда

$$f(z) = ce^{imz}\frac{\Pi'(1-e^{-i(z-a_\mu)})\,\Pi''(1-e^{-i(z-a_\mu)})}{\Pi'(1-e^{-i(z-b_\mu)})\,\Pi''(1-e^{-i(z-b_\mu)})},$$

где произведения с одним штрихом распространены на a_μ и b_μ, лежащие в верхней полуплоскости, а с двумя штрихами — на a_μ и b_μ, лежащие в нижней полуплоскости. Используя указанное представление, автор выводит некоторые свойства $f(z)$ и последовательности ее a-точек. Высказывается мысль о возможности распространения некоторых результатов на почти периодические функции. С этой точки зрения исследована зависимость роста целой функции, представленной рядом Дирихле, от коэффициентов ряда Дирихле. А. Ф. Леонтьев

8754. Об автоморфных формах с особенностями в области существования. Петерссон (Über automorphe Formen mit Singularitäten im Diskontinui-

tätsgebiet. Petersson H.), Math. Ann., 1955, 129, № 4, 370—390 (нем.)

В последнее время в связи с проблемами аддитивной теории чисел появился интерес к теории нецелых, т. е. имеющих особенности, автоморфных форм. Как известно, не существует целых автоморфных форм положительной размерности. Поэтому автоморфная форма положительной размерности однозначно определяется своими полюсами и главными частями. Полюсы и главные части, конечно, нельзя выбрать произвольно. В статье выводятся соотношения, которым удовлетворяют главные части автоморфных форм положительной размерности. Даются аналитические представления для автоморфных форм положительной размерности, позволяющие вычислять коэффициенты разложения этих функций в степенные ряды, а также коэффициенты разложения в ряды Фурье в вершинах фундаментальной области. В конце статьи выведены соотношения, которым удовлетворяют главные части автоморфных форм произвольной комплексной размерности.

И. И. Пятецкий-Шапиро

8755. Аналитические образы голоморфных функций многих переменных. Бенке (Die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Behnke H.), Arch. Math., 1955, 6, № 3, 353—368 (нем.)

Обзор результатов, полученных в теории областей наложения над комплексно-числовым пространством C^n комплексных переменных, в теории голоморфно-полных многообразий, в теории комплексных пространств. В частности, приводятся следующие фундаментальные результаты Ока; 1) в условии голоморфной выпуклости аксиома разделимости является излишней и вытекает из других требований; 2) всякая внутринеразветвленная область голоморфности голоморфно-выпукла; 3) всякая внутринеразветвленная область наложения над пространством $C^n (n \geqslant 2)$, аналитически выпуклая во всех своих граничных точках, является областью голоморфности. Область наложения D аналитически выпукла в своей граничной точке R, если существует окрестность U_R этой точки в области D, являющаяся областью голоморфности. Отметим, что этот результат содержит опубликованные позже работы К. Ока, результаты Норгуэ и Бремермана (РЖМат, 1956, 2067; в этом реферате не указано, что результат Бремермана содержится в теореме Ока).

Б. А. Фукс

8756. Проекции аналитических множеств. Реммерт (Projektionen analytischer Mengen. Remmert R.), Math. Ann., 1956, **130**, № 5, 410—441 (нем.)

Пусть X, Y — два точечных множества и множество $A \subset X \times Y$ (как обычно, топологическое произведение $X \times Y$ множеств X и Y состоит из пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$). Отображение, при котором каждой точке $(x_0, y_0) \in A$ ставится в соответствие точка $x_0 \in X$, называется проектированием множества A на множество X, а возникающее при этом множество $\{x_0\}$ — проекций множества A на множество X.

В § 1 дается определение аналитического множества в комплексно-числовом пространстве C^n n комплексных переменных. Множество $A \subset C^n$ называется аналитическим в точке $P \in C^n$, если можно указать такую окрестность U_p точки P и такую систему функций $f_1, \ldots, f_k$, голоморфных в U_p, что $A \cap U_p = \{f_1 = \ldots = f_k = 0\} \cap U_p$. Множество M называется аналитическим на некотором открытом множестве $G \subset C^n$, если оно аналитично во всех точках $P \in G$. Тут же даются определения униформизируемых (в частности, обыкновенных) и неуниформизируемых точек аналитического множества. Указывается, что неуниформизируемые точки аналитического множества сами образуют аналитическое множество (теорема Картана — Ока).

Определенная на аналитическом множестве A функция $f(P)$ называется голоморфной на этом множестве, если она непрерывна во всех точках $P \in A$ и для всякой униформизируемой точки $P \in A$ превращается в голоморфную функцию в соответствующей части комплексно-числового пространства в результате введения локально-униформизирующих параметров. В результате задания на A некоторой системы голоморфных функций определяется голоморфное отображение аналитического множества A.

В §§ 1—3 указывается ряд свойств аналитических множеств (в частности, относящихся к их локальной теории), определенных на них голоморфных функций, их голоморфных отображений.

§§ 4, 5 посвящены комплексным пространствам. Комплексным называется пространство Хаусдорфа X, на котором следующим образом определена его комплексно-аналитическая структура (это определение комплексного пространства предложено Серром). Существует система $\mathfrak{U}$ элементов (U_i, Ψ_j) (где $i \in J$, J — некоторое множество индексов), накрывающих пространство X. Здесь под элементом покрытия (U_j, Ψ_j) понимается открытое множество $U_i \subset X$, которое гомеоморфным отображением Ψ_j переводится в некоторое множество M_j, являющееся аналитическим в каком-то открытом множестве $G \subset C_j^n$. При этом каждые два элемента покрытия (U_j, Ψ_j) и (U_i, Ψ_i) голоморфно совместны друг с другом. Последнее означает, что или пересечение $U_j \cap U_i$ пусто, или гомеоморфизм $\Psi_i(U_i \cap U_j) \to \Psi_j(U_i \cap U_j)$ является голоморфным отображением. Наконец, предполагается, что всякий элемент покрытия (V, φ) пространства X, голоморфно совместный со всеми элементами покрытия системы $\mathfrak{U}$, принадлежит к этой системе. Далее на комплексные пространства распространяются понятия функции, голоморфной в некоторой точке P, понятия аналитического множества. Затем устанавливается ряд их свойств. Под декартовым произведением $X \times Y$ комплексных пространств X и Y понимается их топологическое произведение, на котором естественным образом (путем соединения комплексно-аналитических структур пространств X и Y) задана комплексно-аналитическая структура; в результате произведение $X \times Y$ оказывается комплексным пространством.

В §§ 6—8 доказывается ряд предложений, относящихся к проекциям аналитических множеств. Среди них отметим следующие: 1) Если A — компактное аналитическое множество в декартовом произведении $X \times Y$ двух комплексных пространств, то проекции множества A на пространства X и Y являются компактными аналитическими множествами. 2) Если A — аналитическое множество в декартовом произведении $X \times Y$ двух комплексных пространств X и Y и пространство X компактно, то проекция множества A на пространство X является аналитическим множеством. Если Y — кратнопроективное пространство, то эта проекция является алгебраическим многообразием.

Б. А. Фукс

8757. Непрерывные, аналитические и собственные модификации комплексных многообразий. Крейсиг (Stetige, analytische und eigentliche Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten. Kreysig E.), Wiss. Zeitschr. E. M. Arndt-Univ. Greifswald Math.-naturwiss. Reihe, 1954—1955, 4, № 5, 457—463 (нем.)

Под комплексным многообразием M^n автор понимает связное комплексное пространство (реф. 8756), которое обладает счетным базисом открытых множеств и в

определении которого все аналитические множества M_j могут быть заменены шаром $\Sigma_{s=1}^{n} |z_s|^2 < 1$. Комплексное многообразие $'M^n$ называется модификацией комплексного многообразия M^n для множества $N \subset M$, если: 1) Существует взаимно однозначное аналитическое отображение T остаточного множества $'M^n - 'N$ на остаточное множество $M^n - N$, причем множество $'N \subset 'M^n$. 2) Для каждой окрестности $U(N) \subset M^n$ и для каждой точки $'P \in 'N$ существует такая окрестность $'U('P) \subset 'M^n$, что $T['U('P) \cap ('M^n - 'N)] \subset U(N) - N$.

Подобная модификация называется непрерывной (соответственно аналитической), если отображение T может быть продолжено до непрерывного (соответственно аналитического) отображения всего многообразия $'M^n$ на многообразие M^n. Аналитическая модификация всегда является непрерывной модификацией. Аналитическая модификация, являющаяся гомеоморфизмом, называется тривиальной. Непрерывное (соответственно аналитическое) отображение одного комплексного многообразия на другое называется собственным (соответственно собственным аналитическим), если при нем прообраз всякого компактного множества сам является компактным множеством. Непрерывная (соответственно аналитическая) модификация называется собственной (соответственно собственной аналитической), если соответствующее ей отображение многообразия $'M^n$ на M^n является собственным (соответственно собственным аналитическим).

В числе других в работе доказываются следующие предложения:

1. Пусть комплексное многообразие $'M^n$ является непрерывной модификацией комплексного многообразия M^n для аналитического множества $N \subset M^n$. Тогда и множество $'N$ является аналитическим в $'M^n$, а $'M^n$ является аналитической модификацией M^n. Отсюда следует, что если $'M^n$ — непрерывная модификация M^n для $N \subset M^n$ и N — аналитическое множество в M^n, то комплексная размерность $'N$ не может быть равной n.

2. Пусть A — некоторое аналитическое множество в M^n, $'M^n$ — непрерывная модификация M^n для аналитического множества $N \subset M^n$. Тогда в $'M^n$ существует такое аналитическое множество $'A$, что множество $'A \cap ('M^n - 'N)$ аналитически эквивалентно множеству $A \cap M^n - N$.

3. Пусть многообразие $'M^n$ является собственной модификацией многообразия M^n для аналитического множества $N \subset M^n$. Тогда для всякого аналитического множества $'A \subset 'M^n$ можно указать такое аналитическое множество $A \subset M^n$, что множество $A \cap (M^n - N)$ аналитически эквивалентно множеству $A' \cap ('M^n - 'N)$. Аналогичные предложения устанавливаются для ограничений на $M^n - N$ и $'M^n - 'N$ голоморфных и мероморфных функций на M^n и $'M^n$. Под ограничением на $M^n - N$ функции f, определенной на M^n, понимается функция, определенная на $M^n - N$, значения которой в точках $M^n - N$ совпадают со значениями в этих точках функции f. Также доказывается, что если для собственной аналитической модификации N и $'N$ являются неприводимыми аналитическими множествами одинаковой размерности, то эта модификация является тривиальной. Б. А. Фукс

8758. Задача Дирихле для n-гармонических функций и связанные геометрические свойства. Р и ц ц а (Dirichlet problem for n-harmonic functions and related geometrical properties. R i z z a G. B.), Math. Ann., 1955, **130**, № 3, 202—218 (англ.)

D — ограниченная область $2n$-мерного евклидова пространства действительных переменных $(x_1, \ldots, x_{2n})$; ее граница Ф предполагается связной, аналитической поверхностью $(2n-1)$-измерений, состоящей из обыкновенных точек. На Ф задается функция u; рассматривается соответствующая задача Дирихле для класса n-гармонических функций. n-Гармонические функции — это действительные части голоморфных функций комплексных переменных $z_k = x_k + ix_{k+n}$ $(k=1, \ldots, n)$. Необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи Дирихле были найдены Севери (Mem. Accad Italia, 1931, **2**, 5). Автор придает этим условиям геометрический характер, вводя в них особое дифференциальное выражение, являющееся обобщением классического определителя Леви $L(\varphi)$ (к которому оно сводится при $n=2$). С помощью этого условия находится явное выражение для нормальной производной от искомой функции на поверхности Ф; последнее дает возможность представить эту функцию в области D с помощью формулы Грина. Б. А. Фукс

8759. О представлении Ф. Риса. I. М а ц у с и т а (Sur la décomposition de F. Riesz. I. M a t s u s h i t a S h i n - I c h i), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 19, 1252—1254 (франц.)

Простое доказательство теоремы Ф. Риса о разложении субгармонической функции. Пусть D является компактной областью евклидова n-мерного пространства $E(n \geqslant 3)$. Вводятся следующие обозначения: $\mathfrak{M}(D)$ — пространство мер Радона над D, $L^0(D)$ — пространство непрерывных в D функций с компактными несущими множествами, $\Gamma(D)$ — выпуклое в $L^0(D)$ множество супергармонических функций, $\Pi(D)$ — линейная огибающая $\Gamma(D)$. Оператор φ_D (локальный лапласиан) определяется как гомоморфизм $\Pi(D)$ на $\mathfrak{M}(D)$. При этом $\Gamma(D)$ отображается на конус положительных мер $\mathfrak{M}^+(D)$, а множество гармонических функций $H(D)$ — в нулевую меру. Ядром этого гомоморфизма является $H(D)$. Каждый класс эквивалентности $\mathfrak{M}(D)/H(D)$ содержит один и только один ньютоновский потенциал $U^{\varphi D}$, масса которого $\in \mathfrak{M}(D)$; разность двух функций одного и того же класса принадлежит $H(D)$. Тем самым получено новое доказательство теоремы Ф. Риса: $f = U^{\varphi_D(f)} + h_D$, $f \in \Pi(D)$, $h_D \in H(D)$ (см., например, Привалов И. И., Субгармонические функции, ОНТИ НКТП, М.— Л., 1937, ч. II, гл. 1, 157—160). Е. Д. Соломенцев

8760. О представлении Ф. Риса. II. М а ц у с и т а (Sur la décomposition de F. Riesz. II. M a t s u s h i t a S h i n - I c h i), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 20, 1373—1375 (франц.)

Теорема I части (реф. 8759) обобщается для областей, удовлетворяющих условию: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех мер $\mu > 0$ с компактными несущими множествами в D существует относительно компактная подобласть D_ε, вне которой потенциал массы μ будет меньше ε. Доказывается теорема: Функция $f \in \Gamma(D)$ (или $f \in \Gamma(E)$) представима в виде $f = \int_E G(x, y)\, d\varphi_D(f) + h_D$ (или в виде $f = U^{\varphi_D(f)} + h_D$) тогда и только тогда, когда существует функция $h_0 \in H(D)$ (или $h_0 \in H(E)$) такая, что $f \geqq h_0$. В статье не упоминается, что это предложение является обобщением известного результата Ф. Риса (Riesz F., Acta math., 1926, **48**, 329—343; 1930, **54**, 321—360; см. также Привалов И. И., Субгармонические функции,

ОНТИ НКТП, М.—Л., 1937, ч. II, гл. 1, 160—163).
Е. Д. Соломенцев

8761. О почти субгармонических функциях класса *PL*. Хаяси (On the functions almost of class *PL*. Hayashi Kenji), Mem. Fac. Sci. Kyûsyû Univ., 1955, **A9**, № 1, 61—64 (англ.)

Функция $u(x) \geqslant 0$ называется функцией класса *PL*, если $\ln u(x)$ субгармоническая. Известно (Rado T., Subharmonic functions, Berlin, 1937), что для принадлежности функции классу *PL* необходимо и достаточно, чтобы u^α, $0 < \alpha \leqslant 1$ была субгармонической. Доказывается аналогичная теорема для почти субгармонических функций класса *PL*, т. е. функций $u(x) \geqslant 0$, суммируемых вместе с $\ln u(x)$ на любом компакте из R^n и таких, что почти всюду в R^n $(\mu_R - \delta) * \ln u \geqslant 0$. Здесь $\mu_R - \delta$ — обобщенная функция (мера), состоящая из положительной единичной массы, равномерно распределенной на сфере радиуса R, и отрицательной единичной массы, сосредоточенной в центре шара. Доказательство проведено в терминах теории распределений Л. Шварца.
Н. С. Ландкоф

8762. Об аналитических функциях целого комплексного аргумента. Фуксман Н. А., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3, 159—164

Следуя Н. П. Романову (Тр. физ. матем. фак. Узб. ун-та, 1951, вып. 47, 3—27), автор рассматривает класс аналитических функций целого аргумента. Поскольку произведение таких функций, как правило, не принадлежит к указанному классу, то вводится операция свертывания двух функций $f(z)$ и $g(z)$

$$\int_0^z f(u)\,\Delta_u\, g(z-u).$$

«Свертка» является аналитической функцией целого аргумента. Применительно к функциям вида $E(c, z)$ и символическим степеням $z^{(n)}$ операция свертывания дает соотношения, аналогичные соответствующим соотношениям для функций непрерывного аргумента. Далее устанавливается, что если аналитическая функция целого аргумента разлагается в ряд по символическим степеням $z^{(n)}$ или $z^{*(n)}$, то частные значения этой функции во всех целых точках на правой действительной полуоси определяют ее во всех целых точках плоскости. Указываются необходимые условия для разложения в степенной ряд функции, построенной по значениям на осях координат. Вводится понятие периодической функции целого аргумента и строится для нее производящая функция. Утверждается (без доказательства) что при m не кратном 4 система

$$\left(\cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m}\right)^x \operatorname{ctg}^y\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{m}\right)$$

является базисом пространства периодических функций с периодом m.
А. А. Миролюбов

8763. Парааналитические функции двух измерений. Попов (Парааналитични функции со две димензии. Попов Благој С.), Годишен зб. филоз фак. Ун-т Скопје. Природно-матем. одд., 1953, 6, № 1, 1—29 (макед.; рез. франц.)

Рассматриваются парааналитические функции двух измерений, введенные Фреше (РЖМат, 1955, 5763; 1956, 1300), и доказываются некоторые свойства отображений двухмерных областей посредством этих функций, аналог теоремы Морера и свойства элементарных парааналитических функций двух измерений. Библ. 5 назв.
В. С. Федоров

8764. Бесконечные алгебры, присоединенные к одному классу уравнений с частными производными. Рошкулец (Algebre infinite atașate la o clasă de ecuații cu derivate parțiale. Roșculeț Marcel), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 9, 1245—1252 (рум.; рез. русс., франц.)

Утверждается, что решениями уравнения

$$\sum C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta} \left(\frac{\partial^n U}{\partial x_0^{\alpha_0} \ldots \partial x_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \partial x_p^{\beta}}\right) = 0 \qquad (1)$$

где $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_{p-1} + \beta = p$

с постоянными коэффициентами $C_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta}$ являются компоненты гиперкомплексных моногенных функций $f(\omega)$, где

$$\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_{p-1} x_{p-1} + \theta x_p;$$

$$f(\omega) = U_0 + \theta U_1 + \ldots + \theta^{n-1} U_{n-1};$$

$$U_i = \sum_{-\infty}^{\infty} U^{(i)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(бесконечные ряды в этих равенствах предполагаются абсолютно сходящимися), $\varphi_1, \ldots \varphi_{p-1}$, θ — элементы ассоциативной и коммутативной алгебры над полем действительных чисел, база которой есть множество всех произведений вида $\varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_{p-1}^{\alpha_{p-1}} \theta^q$, в которых $q = 0, 1, \ldots, n-1$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ принимают все целые положительные и отрицательные и нулевые значения, причем имеют место условия:

$$\sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{p-1} + \beta = n} C_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta} \varphi_0^{\alpha_0} \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \theta^{\beta} = 0; \qquad (2)$$

$$\varphi_0 = 1; \quad \theta^0 = 1; \quad \varphi^0_i = 1; \quad (i = 1, \ldots, p-1); \qquad (3)$$

(1 есть единица этой алгебры). Для компонент $U^{(i)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}}$ функции $f(\omega)$, которые предполагаются действительными дифференцируемыми функциями от $x_0, x_1, \ldots, x_p$, даются условия моногенности в свернутой форме (в терминах внешнего дифференцирования): $d[f(\omega)\, d\omega] = 0$ и в развернутом виде, как аналог известной системы Коши—Римана (эти условия следуют сразу из определения общего понятия моногенности одной гиперкомплексной функции по отношению к другой такой функции, данного референтом (Матем. сб., 1946, **18** (60), № 3, 353—376), и равносильны в данном случае требованию существования такой гиперкомплексной функции $f^{(1)}$, что $df(\omega) = f^{(1)} \cdot d\omega$. *Реф.*). Утверждается, что всякое решение уравнения (1), заданное своим разложением в степенной ряд

$$\sum a_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

есть $\operatorname{Re}\{\Sigma_0^\infty \lambda_k \omega^k\}$ при подходящем подборе гиперкомплексных постоянных λ_k. Особо рассматривается случай уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

когда $\omega = x_0 + \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n + \theta y$, $f(\omega) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} [U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} + \theta V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}] \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_n^{\alpha_n}$ и условие (2) имеет вид: $1 + \varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2 + \theta^2 = 0$. Из остальных результатов отметим аналоги известной теоремы Коши и формулы Остроградского—Грина для замкнутых

кривых и для некоторых замкнутых гиперповерхностей. Библ. 3 назв.

Примечание референта. В статье доказательства отсутствуют. Имеются опечатки. Например: на стр. 1245 в уравнении (1) напечатано x_s вместо x_0; на стр. 1247 в уравнении (5) напечатано $\alpha_j - 1$ вместо $\alpha_j - 2$; на стр. 1248 в уравнении (8) напечатано α_p вместо α_{p-1} и $\beta = 0$ вместо β. На стр 1252 в списке литературы напечатано S. Feodoroff вместо V. S. Feodoroff. В. С. Федоров

8765. **Бесконечные алгебры, ассоциированные с однородными уравнениями в частных производных любого порядка с постоянными коэффициентами.** Рошкулец (Algebre infinite asociate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare. Roşculeţ M. N.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR., 1955, 6, № 3—4, 567—643 (рум.; рез. русс., франц.)

Подробное изложение с доказательствами и примерами опубликованных ранее результатов автора (реф. 8764). В. С. Федоров

8766. **Полигональные функции в линейных ассоциативных и коммутативных алгебрах.** Рошкулец (Fonctions polygènes dans les algèbres linéaires associatives et commutatives. Roşculet Marcel N.), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 1, 51—52 (франц.)

В алгебре с базой $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^n$ и с определяющим соотношением $\theta^{n+1} = 1$ над полем действительных чисел рассматриваются функции

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} \theta^i x_i; \quad f(\omega) = \sum_{i=0}^{n} \theta^i U_i; \quad (\theta^0 = 1),$$

где U_i — действительные функции действительных переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$, определенные в некоторой $(n+1)$-мерной области Δ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Функция $f(\omega)$ не предполагается моногенной по ω в области Δ. Указываются без доказательств некоторые свойства производной $df/d\omega$, зависящей в данной точке области Δ от n параметров: dx_i/dx_0 $(i = 1, \ldots, n)$, и производных высших порядков: $d^p f/d\omega^p$, взятых по прямолинейным путям для $p \geqslant 2$. Исследование производной $df/d\omega$ распространяется на случай более общих алгебр. Обобщаются результаты Каснера (Kasner E., Trans. Amer. Math. Soc., 1928, 30, 805—818).

Примечание референта. Автор не оговаривает необходимых дифференциальных свойств функций U_i. В заглавии статьи имеется опечатка: напечатано Rosculet вместо Roşculeţ. В. С. Федоров

8767. **Характеристика псевдоконформных преобразований.** Моисил (O caracterizare a transformări lor pseudoconforme. Moisil Gr. C.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 1, 5—17 (рум.; рез. русс., франц.)

Исследуются такие дифференциальные свойства преобразования

$$X = X(x, y, s, t), \quad Y = Y(x, y, s, t),$$
$$S = S(x, y, s, t), \quad T = T(x, y, s, t), \qquad (1)$$

которые характеризуют это преобразование как псевдоконформное, т. е. такое, когда каждая из функций $X + iY$ и $S + iT$ есть аналитическая функция от $x + iy$ и $s + it$. Приведем некоторые результаты: 1) за исключением преобразования: $X = x$, $Y = -y$, $S = s$, $T = -t$, необходимым и достаточным признаком псевдоконформности преобразования (1) (действительного дифференцируемого или аналитического комплексного) может служить линейность преобразования квадратичных дифференциальных форм $Q_1 \equiv dx^2 + dy^2$; $Q_2 \equiv ds^2 + dt^2$; $Q_3 \equiv dxds + dydt$; $Q_4 \equiv dxdt - dyds$, т. е. существование равенств вида

$$Q_i^x = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

где $Q_1^x \equiv dX^2 + dY^2$ и т. п.; λ_{ij} — функции от x, y, s, t. 2) Для того чтобы аналитическое комплексное преобразование (1) было псевдоконформным, необходимо и достаточно, чтобы системы Пфаффа $dx + idy = 0$; $ds + idt = 0$; $dx - idy = 0$; $ds - idt = 0$, являлись инвариантными относительно этого преобразования. В. С. Федоров

8768 К. **Старые и новые методы обоснования теории функций.** Хефтер (Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen. Hefftter Lothar, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1955, VIII, 63 S., 12,60 DM), Dtsch. Nationalbiiogr, 1955, A, № 19, 1006 (нем.)

См. также: 8545, 8810, 8816, 8825. 8831, 8839, 8844 8899, 8935, 8956

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8769. **Решение уравнения вида $x^n(t) = f(t)$ в некоторых частных случаях.** Обморшев А. Н. В сб.: Механика (МВТУ, 50). М., Оборонгиз, 1956, 97—100

Выводятся общие формулы для решения уравнения $d^n x/dt^n = f(t)$ при нулевых начальных условиях в случаях, когда функция $f(t)$ есть полином, или показательная или тригонометрическая функция. Решение этого уравнения, как и указывает автор, дано В. И. Смирновым (Курс высшей математики, т. II, 1943) Н. В. Сахаров

8770. **Комплексные величины в начальном курсе дифференциальных уравнений.** Гамильтон (Complex quantities in the first course in differential equations. Hamilton Hugh J.), Math. Mag., 1955, 29, № 2, 83—87 (англ.)

Рассматривается вопрос интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами n-го порядка:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k d^k y/dx^k = f(x).$$

Автор стремится обосновать для учащихся применение комплексных чисел. Работа не содержит ничего нового по сравнению с тем, что имеется по этому вопросу в некоторых курсах математического анализа, например, в курсе В. И. Смирнова (Курс высшей математики, т. II, 1943, § 38), но имеет ценность чисто педагогического характера. Н. В. Сахаров

8771. **К решению линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.** Зборник (Zur Auflösung linearer homogener Differentialgleichungen 2. Ordnung. Zbornik Josef), Z. angew.

Math. und Phys., 1956, **7**, № 1, 64—74 (нем.; рез. англ.)

Хорошо известной заменой независимой переменной

$$u = \int \exp\left[-\int G dx\right] dx$$

уравнение

$$y'' + Gy' + Hy = 0 \qquad (1)$$

приводится к каноническому виду

$$d^2y / du^2 + H \exp\left[2\int G dx\right] y = 0. \qquad (2)$$

В статье дан набор уравнений (1), для которых соответствующее уравнение (2) имеет хорошо известные интегралы (например, $H \exp\left[2\int G dx\right] = q \equiv \text{const}$; $H \exp\left[2\int G dx\right] = n(1-n)/u^2$ и др.). И. М. Соболь

8772. Об интегрировании обобщенного уравнения Риккати. Михэйлеску (Asupra integrării ecuaţiei Riccati generalizate. Mihăilescu Tiberiu), Studii şi cercetări ştiinţ., 1954, **5**, № 1-2, 37—44 (рум.; рез. русс., франц.)

В предыдущей работе автора (Studii şi cercetări ştiinţ., 1951, **2**, № 1—2, 5—16) были найдены условия, которым удовлетворяют пфаффовы формы $\omega_1 = a_i dx^i$, $\omega_2 = b_i dx^i$, $\omega_3 = c_i dx^i$, если система

$$\partial z / \partial x^i + a_i z^2/2 + b_i z + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет решение. В настоящей статье решено уравнение

$$dz + z^2\omega_1/2 + z\omega_2 + \omega_3 = 0$$

при условии, что ω_i удовлетворяют упомянутым требованиям. Если ω_1, ω_2, ω_3 линейно независимы, или $\omega_1 = \lambda\omega_2$, или $\omega_3 = \lambda\omega_2$, то решение содержит две произвольные функции одной переменной и получается без квадратур. В случае $\omega_1 = \lambda\omega_3$ задача сводится к обычному уравнению Риккати, содержащему две произвольные функции. Г. К. Энгелис

8773. Упрощенный метод решения линейных и нелинейных систем. Боксер, Тейлер (A simplified method of solving linear and nonlinear systems. Boxer R., Thaler S.), Proc. I. R. E., 1956, **44**, № 1, 89—101 (англ.)

Дается приближенный метод нахождения значений частных решений линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений при дискретных равноотстоящих значениях аргумента $t = nT$, $n = 0, 1, 2\ldots$ Применительно к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами использование метода не связано с необходимостью решения соответствующих характеристических уравнений.

Для решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами авторами предложена следующая схема:

1. Операционным методом находится $F(p)$ — изображение искомого частного решения $f(t)$.

2. $F(p)$ представляется как алгебраическая дробь относительно $1/p$.

3. Вместо $1/p^k$ в $F(p)$ подставляются некоторые дроби. Например, при $\kappa = 1{,}2$ указанные дроби имеют вид

$$T[1 + z^{-1}]/[1 - z^{-1}]2;$$
$$T^2[1 + 10z^{-1} + z^{-2}]/12(1 - z^{-1})^2,$$

где T — промежуток времени между точками, в которых требуется найти значения решения $f(t)$.

4. Полученная после указанных подстановок дробь делится на T и разлагается в ряд по отрицательным степеням z:

$$D_0 + D_1 z^{-1} + D_2 z^{-2} + \ldots$$

Коэффициенты D_n соответственно приближенно равны значениям искомого решения $f(t)$ при $t = nT$. Доказательство связано с рассмотрением приближенного равенства

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp \approx$$
$$\approx \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\pi/T}^{c+i\pi/T} F(p)\, e^{pt} dp,$$

где T — достаточно малая величина.

Указанная схема с некоторыми обобщениями применяется авторами для решения линейных уравнений с переменными коэффициентами и нелинейных уравнений. Приведены примеры с сопоставлением приближенного и точного решений. Относительно выбора шага T в зависимости от требуемой точности даны указания общего характера; оценки не приведены. В. Г. Лабазин

8774. Об ошибках при решении одного дифференциального уравнения. Буланин В. И., Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 77, 101—104

Обращая внимание на неправильное нахождение общего решения уравнения вида $(x^n y')' + cxy = 0$ Г. С. Жирицким в его курсах газовых турбин (Газовые турбины, М.—Л., 1948, 413—415; Авиационные газовые турбины., М., 1950, 403—406), автор указывает на сомнительность следствий из этого решения.

А. Д. Мышкис

8775. Интегрирование неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Гермэнеску (Integrarea ecuaţiilor diferenţiale liniare, neomogene şi cu coeficienţi constanţi. Ghermănescu M.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, **A7**, № 2, 62—65 (рум.)

Используя символический метод, автор дает формулу в виде кратного интеграла для частного решения указанного в заглавии уравнения. Приведен пример.

Б. П. Демидович

8776. Численное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x)$. Стейн (A numerical solution of $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x)$. Stein P.), Math. Gaz., 1955, **39**, № 329, 203—206 (англ.)

Рассматривается уравнение $d^2y/dx^2 = F(x)$, где $F(x)$ определена и интегрируема на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$. Ищется решение $f(x)$ этого уравнения, принимающее значения $f(0) = y_0$ и $f(l) = y_l$.

Излагается численный метод отыскания значений $f(x)$ в точках $x_r = rh$ (где $h = l/n$ и $r = 1, 2, \ldots, n-1$), которые обозначаются $y_r = f(x_r)$. Метод заключается в том, что при помощи величины $\lambda(a) = -\int_0^h t\{F(a + h - t) - F(a - h + t)\}\, dt$ строится система уравнений первой степени, из которой определяются значения y_r, через величины $\lambda_r = \lambda(x_r)$. Выведена формула для y_r.

В предположении, что $F(x)$ разлагается в ряд Тейлора, получается другое выражение для $\lambda(a)$, которое потом заменяется приближенным значением.

Оценивается ошибка в значениях y_r, получаемая при этой замене. Оценка дается через максимум $|F''(x)|$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$. Кроме того, рассматривается случай, когда F и F' разрывны. Разбирается применение метода к задаче об упругой балке с различными условиями на концах. А. Н. Черкасов

8777. Применение компактности семейства функций к дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью. Соколов П. В., Уч. зап. Пензенск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 2, 47—60

Методом ломаных Эйлера доказывается существование обобщенных интегральных кривых дифференциального уравнения 1-го порядка

$$dy/dx = f(x,\ y)$$

для некоторых случаев ограниченных разрывных функций.

Примечание референта. В условии теоремы 1 говорится, что функция $f(x, y)$ непрерывна в области q на любой кривой вида $y = \Phi(x)$, за исключением лишь конечного числа точек этой кривой, а при доказательстве теоремы предполагается, что число точек разрыва функции $f(x, y)$ конечно в области q. Эти два условия, очевидно, не эквивалентны между собой. Теорема 2 является частным случаем известной теоремы Каратеодори (см., например, Бокштейн М. Ф., Уч. зап. МГУ, 1939, 15, 2—72). Б. П. Демидович

8778. Об одном классе теорем единственности для уравнения $y' = f(x, y)$. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 209—213

Известные теоремы единственности (см., например, Rosenblatt, Arch. Math. Astr. Fysik, 1909, 5, № 2, 4; Perron O., Math. Z., 1928, 28, 216—219) уточняются для того случая, когда правая часть уравнения удовлетворяет условию Гёльдера.

Теорема 1. Если $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) непрерывна и удовлетворяет условиям

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant p\,|y_1 - y_2|^{\alpha},$$
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \cdot |x - x_0| \leqslant k\,|y_1 - y_2|,$$

где $0 < \alpha < 1$, $(1-\alpha)\,k < 1$, то через эту точку проходит только одно решение уравнения $y' = f(x,y)$. Условие $(1-\alpha)\,k < 1$ нельзя ослабить.

Теоремы Розенблатта, Перрона и теорема 1 переносятся на уравнения в банаховых пространствах. Этим путем получена следующая теорема.

Теорема 2. Если непрерывная функция $K(x, t, y, s)$ удовлетворяет условию

$$|K(x, t, y_1, s) - K(x, t, y_2, s)| \leqslant |y_1 - y_2| / (b-a)(x-x_0),$$

то при любой непрерывной $\varphi(t)$ существует единственное решение $y(x, t)$ уравнения

$$\partial y / \partial x = \int_a^b K(x, t, y(x, s), s)\,ds,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0, t) = \varphi(t)$ и определенное при $a \leqslant t \leqslant b$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$, где x_2 может зависеть от $\varphi(t)$.

Кроме того, формулируется теорема единственности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и теорема единственности решения, удовлетворяющего некоторому условию на бесконечности (вместо начального условия). А. Ф. Филиппов

8779. О теореме существования Каратеодори для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Акуаро (Sul teorema di esistenza di Caratheodory per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Aquaro Giovanni), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 2, 208—212 (итал.)

Доказано, что в известных условиях Каратеодори существования решения уравнения $y(x) = \eta + \int_a^x f(t, y(t))\,dt$, где $y(t)$ пробегает множество $C[a, b]$ непрерывных p-мерных векторных функций аргумента $t \in [a, b]$, требование мажорируемости f суммируемой функцией t можно заменить на такое: существует непрерывная положительная несуммируемая функция $\varphi(s)$ $(0 \leqslant s < \infty)$, для которой множество функций $\int_a^x \varphi(\|y(t)\|)\,\|f(t, y(t))\|\,dt$ $(y(t) \in C[a, b])$ равномерно абсолютно непрерывно на $[a, b]$.

Примечание референта. Неравенство на стр. 209, строка 7 снизу, совершенно искажено: оно должно иметь вид $\sum_{k=1}^{q} \|v(b_k) - v(a_k)\| < \varepsilon$.

А. Д. Мышкис

8780. Обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие случайные функции. Матьюс, Сриниваса н (Ordinary linear differential equations involving random functions. Mathews P. M., Srinivasan S. K.), Proc. Indian Acad. Sci., 1956, **A43**, № 1, 4—20 (англ.)

Для дифференциального уравнения второго порядка

$$d^2y / dt^2 + \lambda_1(t)\,dy/dt + \lambda_2(t)\,y = k(t)\,x(t), \qquad (1)$$

где λ_1, λ_2, k — систематические функции и $x(t)$ — случайный процесс, ставится вопрос об определении закона распределения случайной функции $y(t)$ по закону распределения заданной искомой функции $x(t)$ Получено частное решение вида

$$y = e^{-\mu(t)/2}\int_0^t e^{-\alpha_2(t)+\alpha_2(\tau)}d\tau \int_0^{\tau} e^{\alpha_2(\tau)-\alpha_2(\tau')+\mu(\tau')/2} \times k(\tau')\,x(\tau')\,d\tau' \qquad (2)$$

Здесь

$$\mu(t) = \int_0^t \lambda_1(\tau)\,d\tau, \qquad \alpha_2(t) = \int_0^t \alpha_1(\tau)\,d\tau,$$

далее α_1 — решение уравнения Риккати:

$$d\alpha / dt - \alpha^2 = -\lambda_1^2(t)/4 - 2^{-1}d\lambda_1(t)/dt + \lambda_2(t).$$

Исходя из формулы (2), вычисляются первые три момента для некоторых физических процессов. Подробно рассмотрен случай дифференциального уравнения первого порядка. Делается замечание о методе вычисления моментов для случайного процесса y, заданного уравнением m-го порядка типа (1).

В работе имеются опечатки: например, в формуле (2) под интегралом пропущен показатель $\mu(\tau')/2$.

В. С. Новоселов

8781. Об одной теореме алгебраических дифференциальных уравнений. Пейович (O jednoj teoremi algebarskih diferencijalnih jednačina. Pejović T.), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, 6, № 1—2, 74—79 (серб;. рез. франц.)

Петровичем доказана (Петровић, Publ. math. Univ. Belgrade, 1937—1938, 6—8, Belgrade) следующая теорема о структуре решений одного класса дифференциальных уравнений: Если $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) = 0$ — дифференциальное уравнение, левая часть которого — полином относительно $y, y', \ldots, y^{(p)}$ с аналитической зависимостью от x, то имеет место представление $x = e^{\varphi_1(t)}$, $y = e^{\varphi_2(t)}$, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — голоморфные функции t — линейные комбинации конечного числа функций вида $\int_0^t e^{u_k(\tau)}\,d\tau$, а функции $u_k(t)$ удовлетворяют системе

$$\frac{du_k}{dt} = \sum_{s=1}^{m} a_s^{(k)}\,e^{u_s(t)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

с постоянными коэффициентами $a_s^{(k)}$. В реферируемой работе эта теорема Петровича доказывается другим способом. Н. И. Гаврилов

8782. Об асимптотическом поведении решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. **Марич** (О асимптотском понашању интеграла једне класе нелинеарних диференцијалних једначина другог реда. Марић Бојислав), Зб. радова Српска АН, 1955, **43**, 27—40 (серб.; рез. англ.)

Основываясь на методе, примененном Авакумовичем (Avakumović V. G., Publ. Inst. math. Acad. Serbe sci., 1947, 1, 101—113) при исследовании уравнения Томаса — Ферми, автор рассматривает асимптотическое поведение решения краевой задачи $y''(x)=\rho_\varkappa(x)\,y^\lambda(x)\times$ $\times L_n(y^{-1}(x))$, $y(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$; $\varkappa>1$, $\lambda>1$, $n\geqslant 1$. Здесь $\rho_\varkappa(x)=\rho(\exp x^{1/\varkappa})$, $\rho(xt)/\rho(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}t^\alpha$ при любом $t>0$ для некоторого $\alpha>0$, а $L_n(x)=\prod_{\nu=1}^{n}\ln_\nu^{\xi_\nu}x$, где $\ln_\nu x$ — ν-я итерация логарифма. Доказано, что

$$y(x)\sim\left\{\frac{\xi_1\varkappa(\lambda-1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\,x^{[2\varkappa-2+\xi_1]/\varkappa}\rho_\varkappa(x)\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{\nu=1}^{n-1}\ln_\nu^{\xi_\nu}x\right\}^{1/[1-\lambda]}.$$

Доказательство основано на замене $y(x)=p(x)\,z(\varphi(x))$; после соответствующего выбора функций $p(x)$ и $\varphi(x)$ удается показать, что $z(\varphi(x))\xrightarrow[x\to\infty]{}1$. А. Д. Мышкис

8783. Критерии ограниченности решений нелинейных дифференциальных уравнений. **Там Цой Так** (Criteria of boundedness of the solutions of nonlinear differential equations. Taam Choy-Tak, Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 377—385 (англ.)

Исследуется дифференциальное уравнение

$$(r(x)\,y')'+\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\,y^{2i-1}=0, \qquad (1)$$

где функции $r(x)$, $p_i(x)$ непрерывны, а функции $r(x)\cdot p_i(x)$ абсолютно непрерывны, $a\leqslant x<\infty$.

Теорема 1. Все решения уравнения (1) ограничены $(a\leqslant x<\infty)$, если

$$rp_i>0,\ i=1,2,\ldots,n,\ a\leqslant x<\infty;$$

$$\int_a^\infty(rp_k)^{-1}(rp_k)'_-\,dx<\infty,\ k \text{ определено},\ 1\leqslant k\leqslant n;$$

$$\int_a^\infty(rp_i)^{-1}(rp_i)'_+\,dx<\infty,\ i=1,2,\ldots,n,\ i\neq k.$$

В частности, условия теоремы 1 выполняются (для достаточно больших x), если $rp_i\to a_i>0$ $(x\to\infty)$, $\int_0^\infty|(rp_i)'|\,dx<\infty$; при этих условиях теорема 2 подробно описывает поведение интегралов уравнения (1).

Наконец, для уравнения

$$(r(x)\,y')'+\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\,y^i=0,\ n \text{ — нечетное число}, \qquad (2)$$

справедлива теорема 3: Все решения уравнения (2) ограничены $(a\leqslant x<\infty)$, если $\int_a^\infty|(rp_i)'|\,dx<\infty$, $\inf_{a\leqslant x<\infty}rp_n>0$.

Автор обобщает результаты, которые получили Беллман и Каччопполи, Бутлевский, Асколи (Bellman R., A survey of the theory of the boundedness, stability, and asymptotic behavior of solutions of linear and nonlinear differential and difference equations, Washington, D. C., Department of the Navy, 1949). J. Kurzweil

8784. Теория локального анализа обыкновенных дифференциальных уравнений (I). **Цинь Юаньсюнь** (常微分方程的區域分析理論. I. 秦元勳), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1956, 6, № 1, 19—34 (кит.; рез. англ.)

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt=X(x,y),\quad dy/dt=Y(x,y), \qquad (1)$$

где $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ обладают частными производными 1-го и 2-го порядка в замкнутой области S. Рассмотрим следующую приближенную систему:

$$dx/dt=X_n(x,y),\quad dy/dt=Y_n(x,y), \qquad (2)$$

где $X_n(x,y)$ и $Y_n(x,y)$ — некоторые полиномы степени n. Чтобы определить $X_n(x,y)$ и $Y_n(x,y)$, наложим два условия. 1-е условие

$$\partial X_n/\partial x+\partial Y_n/\partial y=0 \qquad (3)$$

назовем условием выразимости (expressibility); 2-е условие (условие аппроксимируемости)

$$I_n(X,Y;S)\equiv\iint_S\{(X-X_n)^2+(Y-Y_n)^2\}\,dS \qquad (4)$$

имеет абсолютный минимум при условии (3).

1. Для того чтобы такая пара функций $X_n(x,y)$ и $Y_n(x,y)$ существовала и была единственной, необходимо и достаточно, чтобы

$$H_n(X,Y;S)\equiv\sum_{i=0}^{n}\Big[\iint_S Xy^i\,dS\Big]^2+\sum_{i=0}^{n}\Big[\iint_S Yx^i\,dS\Big]^2+$$
$$+\sum_{i\geqslant 0,\ j\geqslant 0}^{2\leqslant i+j\leqslant n}\{\iint_S[(i+1)\,x^{i+1}y^j X-$$
$$-(j+1)\,x^i y^{j+1}Y]\,dS\}^2>0. \qquad (5)$$

2. Если такая пара функций существует для некоторого неотрицательного целого числа n, то она существует для всех целых чисел $m>n$.

3. Такая пара функций всегда существует или для самой области S, или для некоторой области, получаемой из S малой деформацией.

4. Разделим S на подобласти $\{S_i\}$. Пусть Δ означает максимальный диаметр $S_i's$. Пусть $X_n(S_i)$ и $Y_n(S_i)$ означают однозначно определенные функции для S_i. Мы имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{\{s_i\}}\iint_{s_i}\{[X_n(S_i)-X]^2+[Y_n(S_i)-Y]^2\}\,dS_i=0. \qquad (6)$$

Рассмотрим случай $n=1$. Интегральные кривые (2) образуют систему конических сечений. Рассмотрим окрестность произвольной точки (x_0,y_0). Пусть S — квадрат с центром в точке (x_0,y_0) и сторонами, параллельными координатным осям. Пусть длина стороны квадрата стремится к 0, тогда мы получим предельное коническое сечение. Точка (x_0,y_0) будет называться эллиптической, гиперболической и параболической, если предельное коническое сечение соответственно является эллипсом, гиперболой или параболой. Область, состоящая из точек одного и того же типа, будет называться соответственно эллиптической, гиперболической или параболической.

Структура интегральных кривых в эллиптической области очень проста. Знак кривизны кривых один и тот же. Отсюда легко определяются возможные типы особых точек.

Параболические точки или заполняют всю область S, или, вообще говоря, заполняют кривые. Эти кривые

определяются уравнением

$$\Delta(x, y) \equiv \left[\frac{\partial X(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}\right]^2 + 4\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

и отделяют эллиптические и гиперболические области.

Структура интегральных кривых в гиперболической области в общем случае более сложная и область S следует разбивать на части. Деля S на области различных типов, мы можем выяснить структуру интегральных кривых гораздо лучше. Даны примеры, которые показывают, как этот метод применяется к различным проблемам. Резюме автора

8785. Об особых точках дифференциальных уравнений $d^2y/dx^2 + f(x,y)\,dy/dx + g(x,y) = P(x)$. Сугияма (On the singularities of the differential equation $d^2y/dx^2 + f(x,y)dy/dx + g(x,y) = P(x)$. Sugiyama Shohei), Kodai Math. Sem. Repts, 1955, 7, № 1, 23—29 (англ.)

Вначале рассматриваются уравнения вида

$$d^2y/dx^2 + f(y)\,dy/dx + g(y) = P(x), \qquad (1)$$

где $f(y) = ay^n + by^{n-1} + \ldots + c$, $a \neq 0$, $n \neq 0$,

$g(y) = \alpha y^m + \beta y^{m-1} + \ldots + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $m \neq 0, 1$,

$P(x)$ — однозначная регулярная функция в некоторой области, и получаются следующие результаты:

Теорема 1. Пусть решение (1) аналитически продолжается до некоторой точки x_0, но не через нее, вдоль всякой кривой, которая начинается от некоторой точки, где решение (1) регулярно. Тогда, если при $x \to x_0$ вдоль указанной кривой решение стремится к бесконечности, то существует решение вида:

$$y = \sum_{\nu=-1}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^{\nu/m} \text{ при } n \geqslant m-1,$$

$$y = \sum_{\nu=-1}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^{2\nu/[m-n-1]} \text{ при } n < m-1.$$

Теорема 2. Для того чтобы точка $x = x_0$ была полюсом решения уравнения (1), но не была точкой разветвления, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

1) $\begin{cases} n \geqslant 2 \\ m = n+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} n = 1 \\ m = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} n = 0 \\ m = 2, 3 \end{cases}$

Далее автор, рассматривая уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{f(y)}{x}\frac{dy}{dx} + g(y) = P(x) \qquad (2)$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{f(y)}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{g(y)}{x^2} = P(x), \qquad (3)$$

получает аналогичные результаты для точки $x = 0$.

Наконец, рассмотрено поведение решений уравнений видов (1), (2), (3) для $x = \infty$. Ким Чэ Джен

8786. Идеальная топографическая система в окрестности грубого предельного цикла и грубого фокуса. Леонтович Е. А., Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1955, вып. 28, 3—19

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y), \qquad (1)$$

где P и Q голоморфны в некоторой области.

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — предельный цикл периода τ системы (1), и голоморфные периодические по s с периодом τ функции $x = \varphi_1(s, n)$, $y = \psi_1(s, n)$ задают топографическую систему $n = \text{const}$, содержащую этот предельный цикл: $\varphi_1(s, 0) \equiv \varphi(s)$, $\psi_1(s, 0) \equiv \psi(s)$. Перейдя в системе (1) к координатам s, n, получим

$$\frac{dn}{ds} = \Phi(s, n) = B_1(s)\,n + B_2(s)\,n^2 + \ldots,$$

где $\Phi(s, n)$ — голоморфная при $|n| < n^*$ периодическая по s функция. Автор называет топографическую систему $n = \text{const}$ идеальной, если $\Phi(s, n)$ не зависит от s, и доказывает существование такой системы в окрестности грубого цикла и грубого фокуса.

Воспроизводя рассуждения А. М. Ляпунова при доказательстве существования голоморфного интеграла в случае центра, автор показывает, что семейство идеальной топографической системы в окрестности фокуса может быть записано в виде $F(x, y) = \text{const}$, где $F(x, y)$ — голоморфная в этой окрестности функция.

Ю. К. Солнцев

8787. О дифференциальном уравнении Льенара. Лефшец (On Liénard's differential equation. Lefschetz S.), Proc. Sympos. Appl. Math., 1954, 5, 149—153 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x}dF/dx + x = 0, \qquad (1)$$

где $F(x)$ — четная аналитическая функция, $F(x)$ монотонна при $x > x_1$, $F(x) \sim cx^n$ при $x \to \infty$, где $n \geqslant 3$.

Доказывается, что на фазовой плоскости вдали от начала координат интегральные кривые расположены аналогично кривым для уравнения Ван-дер-Поля. Если в правую часть уравнения (1) добавить непрерывную периодическую функцию $e(t)$, то полученное уравнение будет иметь периодическое решение.

Часть результатов статьи см. РЖМат, 1956, 7333.

А. Ф. Филиппов

8788. К вопросу о применении метода гармонической линеаризации в теории регулирования. Попов Е. П., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, 211—214

Рассматривается вопрос обоснования применения метода гармонической линеаризации к задачам теории автоматического регулирования. С этой целью устанавливается форма наличия малого параметра в нелинейных задачах теории регулирования.

Показано, что дифференциальное уравнение вида

$$Q(p)\,x + R(p)\,F(x, px) = 0, \qquad (1)$$

где $p = d/dt$, $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены любой степени, $F(x, px)$ — заданная нелинейная функция, может быть заменено уравнением вида

$$[Q(p) + R(p)(q + q_1 p/\omega)]\,x = 0, \qquad (2)$$

где

$$q = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(a\sin u, a\omega\cos u)\sin u\,du,$$

$$q_1 = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(a\sin u, a\omega\cos u)\cos u\,du. \qquad (3)$$

Показано, что такая замена формально эквивалентна следующей записи исходного уравнения (1):

$$Q(p)\,x + R(p)(q + q_1 p/\omega)\,x + \varepsilon f(x, p) = 0, \qquad (4)$$

причем запись уравнения (1) с малым параметром в форме (4) справедлива в области существования решения $x = a\sin\omega t + \varepsilon y(t)$, близкого к синусоидальному.

Ю. А. Митропольский

8789. Особенные колебания нелинейных систем дифференциальных уравнений. I, II. Хирасава (On singular perturbation problems of non-linear systems of differential equations. I, II. Hirasawa Yoshikazu), Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1955, 3, 115—122; 4, 15—23 (англ.)

Рассматривается вопрос о достаточных условиях для того, чтобы решение системы

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t, \varepsilon);\ \varepsilon d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t, \varepsilon), \quad (1)$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{f}$ — m-мерные векторы, а $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{g}$ — n-мерные векторы, при $\varepsilon \to +0$, стремилось на отрезке $[0, \tau]$ к решению системы

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0);\quad 0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0). \quad (2)$$

Начальные значения $\mathbf{X}(0, \varepsilon)$ и $\mathbf{x}(0)$ предполагаются близкими, начальные значения $\mathbf{Y}(0, \varepsilon)$ — ограниченными (РЖМат, 1955, 7280). Автор утверждает, что в ранее опубликованных другими авторами решениях этой проблемы предполагалась дифференцируемость функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, и ставит задачу избавиться от этого ограничения. Исходя из этого, автор в первой части статьи указывает следующие достаточные условия:

C1. Решение $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ существует, непрерывно и дифференцируемо на отрезке $[0, \tau]$. Все свойства функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, о которых идет речь в дальнейшем, предполагаются имеющими место в некоторой окрестности D этого решения. В D функции $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)$ и $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)$ непрерывны.

C2. Функции $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)$ удовлетворяют условию Липшица по x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

C3. Функции $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)$ удовлетворяют условию Липшица по x_j $(j = 1, 2 \ldots, m)$.

C4. Для любого j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ функция $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)$ не зависит от $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$, и, кроме того,

$$\frac{g_j(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_{j-1}, \bar{y}_j, y_{j+1}, \ldots, y_n t, 0) - g_j(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_{j-1}, \tilde{y}_j, y_{j+1}, \ldots, y_n, t, 0)}{\bar{y}_j - \tilde{y}_j} \leqslant -L < 0.$$

C5. Функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon)$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon)$ равномерно сходятся к соответствующим функциям $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)$, когда $\varepsilon \to +0$.

Таким образом, формально не прибегая к требованию дифференцируемости, автор в пункте C4 накладывает на функции $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, 0)$ ограничения значительно более жесткие, чем существование и непрерывность первых производных по y_j $(i \neq j)$. Автор, повидимому, не знаком с работами советских ученых (он на них не ссылается), между тем А. Н. Тихонов, используя функцию Ляпунова, полностью решил поставленную автором задачу (Матем. сб., 1950, 27, (69), 147—156).

Во второй части автор для решения той же задачи использует функцию $S(\mathbf{x})$ Камке. Эта функция определяется следующими условиями: а) функция $S(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}$ — m-мерный вектор) определена и непрерывна во всем m-мерном пространстве R_m; б) положительно однородна, т. е. $S(\lambda\mathbf{x}) = \lambda S(\mathbf{x})$ при $\lambda > 0$; в) полуаддитивна, т. е. $S(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leqslant S(\mathbf{x}) + S(\mathbf{y})$; г) $S(0) = 0$ и, следовательно, $S(\mathbf{x}) > 0$ во всех точках R_m, исключая точки 0, — т. е. фактически обладает свойствами нормы. Указываются все те же достаточные условия, что и в первой части, за исключением условия C4; при этом условие Липшица и равномерная непрерывность формулируются при помощи функции $S(\mathbf{x})$. Условие C4 заменяется следующим: любые две точки $(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}, t)$ и $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, t) \subset D$ связаны соотношением

$$S[\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}} + \tau\{\mathbf{g}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}, t, 0) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, t, 0)\}] \leqslant (1 - \tau\sigma) S(\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}),$$

где $\sigma > 0$ и $\tau > 0$ — произвольные числа, причем τ должно быть достаточно мало. И. С. Градштейн

8790. К теории колебаний автономной квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Курцвейль Ярослав, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 4, 517—531 (чеш.; рез. англ.)

Устанавливаются условия существования и метод вычисления последовательными приближениями периодических решений квазилинейных автономных систем n-го порядка вида

$$\dot{x} = (Ax + \mu f(x, \mu), \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — векторная функция, A — матрица с постоянными элементами, f — векторная функция, μ — малый параметр. Функция f предполагается неаналитической и уравнение (1) имеет при $\mu = 0$ периодическое решение, зависящее от произвольного числа $m \leqslant n$ постоянных интегрирования. Независимо от автора та же задача решена Н. Г. Булгаковым (РЖМат, 1956, 5234). И. Г. Малкин

8791. Мажорантно-минорантный метод оценок для собственных значений одномерной самосопряженной краевой задачи четвертого порядка. Задирака К. В., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 1, 12—25

Дифференциальное уравнение

$$d^4y/dx^4 + Q(x)\,y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

с начальными условиями: $y(0) = y_0$; $y'(0) = y_0'$; $y''(0) = y_0''$; $y'''(0) = y_0'''$ эквивалентно интегральному уравнению

$$y(x) = \underline{y}_0(x) - \frac{1}{2M^3}\int_0^x [\operatorname{sh} M(x - \xi) - \sin M(x - \xi)] \times [M^4 + Q(\xi)]\, y(\xi)\, d\xi.$$

Здесь $M^4 = |\max Q(x)|$; $\underline{y}_0(x)$ — решение уравнения $d^4y/dx^4 - M^4y = 0$, удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и $y(x)$. Интегральное уравнение используется для построения последовательных приближений.

Пусть $M^4 + Q(x) \leqslant 0$. В этом случае исследуются свойства приближений, аналогичные теореме о дифференциальных неравенствах Чаплыгина; доказана монотонная сходимость верхних и нижних приближений вместе с их производными до третьего порядка включительно.

Собственную функцию краевой задачи

$$d^4y/dx^4 + [q(x) - \lambda p(x)]\, y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$
$$y(0)\sin\alpha_0 + y'''(0)\cos\alpha_0 = 0,$$
$$y_0'\sin\alpha_1 + y''(0)\cos\alpha_1 = 0,$$
$$y(l)\sin\beta_0 + y'''(l)\cos\beta_0 = 0,$$
$$y'(l)\sin\beta_1 + y''(l)\cos\beta_1 = 0$$

можно искать в виде

$$y(x, \lambda) = C_1 y_1(x, \lambda) + C_2 y_2(x, \lambda),$$

где фиксированные решения $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ удовлетворяют краевым условиям в нуле. Подставляя $y(x, \lambda)$ в краевые условия при $x = l$ и приравнивая нулю определитель при C_1 и C_2, получим уравнение $F(\lambda) = 0$ для определения λ. Автор заменяет $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ в уравнении $F(\lambda) = 0$ верхними или нижними приближениями. Корни полученных уравнений являются приближенными значениями λ.

Указана вычислительная схема и подробно решены два числовых примера. И. М. Соболь

8792. Асимптотические соотношения для собственных значений и собственных функций плоской задачи колебаний. Эрлинг (Asymptotiska relationer för egenvärden och egenfunktioner till ett enkelt svängningsproblem. Ehrling Gunnar), 12 te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 26—33 (швед.)

Дается метод определения асимптотических соотношений для собственных значений и собственных функций применительно к определенной задаче колебаний путем сведения к одномерному случаю. Этот метод применяется к задаче колебаний пластинки при общих граничных условиях, которые изучались Плейелем (Pleijel Å., Communs Pure and Appl. Math. 1950, 3, № 1, 1—10). Асимптотические формулы для функции Грина были получены, следуя Гордингу (Gårding L., Kgl. Fysiogr. Sällsk. Lund förh., 1951, 21, № 1).

8793. Определение конфигурации области возможных решений системы линейных дифференциальных уравнений. Найшуль А. Б., Светлицкий В. А., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 1, 144—147

Рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)\, x_j + \sum_{\beta=1}^{\rho} [G_{i\beta}(t)\, u_\beta(t) + H_{i\beta}(t)\, s_\beta] \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $G_{i\beta}(t)$, $H_{i\beta}(t)$ — заданные функции, а для функций $u_\beta(t)$ и параметров s_β заданы их наибольшие и наименьшие возможные значения. Предполагается, что имеет место теорема существования и что известна фундаментальная матрица соответствующей однородной системы.

Выбираются начальные значения переменных из заданной области, законы изменения $u_\beta(t)$ и значения s_β так, чтобы выражение для проекции вектора-решения на некоторое направление было наибольшим. В результате определения наибольших проекций для n ортогональных направлений можно построить область возможных отклонений. В заключение определяется проекция области возможных отклонений на двумерную плоскость. В. В. Старжинский

8794. Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению. Красовский Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 2, 255—265

Обзор результатов, полученных главным образом автором, по обращению теорем второго метода Ляпунова. Подробно рассматривается связь задачи о существовании функции Ляпунова с понятием равномерности устойчивости и неустойчиво ти.

Дается характеристика обращения теорем второго метода Ляпунова, применимого как в случае устойчивости, так и в случаях неустойчивости. Приводится теорема существования функций Ляпунова, удовлетворяющих определенным оценкам, что дает возможность сформулировать теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению в случае системы нелинейных уравнений.

Автор применяет метод функций Ляпунова для исследования устойчивости по первому приближению положения равновесия динамической системы, заданной в абстрактном пространстве. Разработанный метод применяется автором к доказательству теорем об устойчивости по первому приближению для систем уравнений с запаздываниями.

Подробное доказательство большей части результатов статьи опубликовано автором ранее (РЖМат, 1955, 4406; 1956, 1336, 2188). Е. А. Барбашин

8795. Оценки характеристических показателей решений системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений. Горбунов А. Д., Вестн. Моск. ун-та, 1956, № 2, 7—13

Рассматривается система

$$dx/dt = L(t)\, x. \qquad (1)$$

Не предполагая ограниченности элементов матрицы $L(t)$, автор утверждает существование нормальной системы решений для (1), однако рассуждения автора не могут рассматриваться как доказательство, так как он исходит из определения нормальности (теорема 3), отличного от данного Ляпуновым. В дальнейшем автор не пользуется этим результатом.

Существует оценка (известная как теорема Важевского):

$$e^{\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau} \leqslant \| x(t) \| / \| x(t_0) \| \leqslant e^{\int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\, d\tau}, \qquad (2)$$

где $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ — соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $[L(t) + L^*(t)]/2$, а $\| x \|$ — норма вектора x в обычной метрике. Из (2) вытекают очевидные оценки характеристического показателя $x(t)$.

Содержание реферируемой статьи по существу сводится к утверждению, что в оценках типа (2) можно пользоваться любой другой дефинитной метрикой в пространстве $\{x(t)\}$, полагая $\| x(t) \|_G = (G(t)\, x, x)$ с положительно определенной, симметричной, дифференцируемой по t матрицей $G(t)$. Выписаны соответственно измененные оценки типа (2) и вытекающие из них (при дополнительных предположениях о G) оценки характеристических показателей. Р. Э. Виноград

8796. Об устойчивости нелинейных систем. Хан (Über Stabilität bei nichtlinearen Systemen. Hahn Wolfgang), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 12, 459—462 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Рассматривается нелинейная система уравнений

$$\dot{x}_i(t) = X_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где функции X_i удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} (p_{ij} - v_{ij})\, x_j < X_i < \sum_{j=1}^{n} (p_{ij} + w_{ij})\, x_j.$$

Дается вывод достаточных условий асимптотической устойчивости решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (оценка чисел v_{ij}, w_{ij}). Вывод основан на применении квадратичной функции Ляпунова v, удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} (p_{i1} x_1 + \ldots + p_{in} x_n) = -a (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \quad (a > 0),$$

и подобен методам исследования, применяемым обычно для решения таких задач (см., например, Айзерман М. А., Теория автоматического регулирования двигателей, Гостехиздат, 1952). Задача приводится к исследованию неравенств, которые соответствуют главным диагональным минорам квадратичной формы, стоящей в производной dv/dt в силу уравнений (1). Порядок неравенств оценивается по числу нелинейных членов в системе (1).

Примечание референта. Определение асимптотической устойчивости, приведенное в статье, является неполным (по сравнению с определением, общепринятым для подобных задач). Наряду с указанным автором требовани-

ем $\lim x_i(t) = 0$ (при $t \to \infty$), в определение включается обычно требование устойчивости решения $x_i = 0$ (по Ляпунову). Критерии, выведенные в статье, соответствуют полному определению. Н. Н. Красовский

8797. Критерий устойчивости для систем дифференциальных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами. Шварц (Critère de stabilité pour des systèmes d'équations différentielles à coefficients constants complexes. Schwarz Hans Rudolf), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 3, 325—327 (франц.)

Показывается, что произвольная комплексная матрица при помощи элементарных преобразований приводится к каноническому виду:

$$\begin{bmatrix} ib'_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & ib'_{22} & b_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & ib'_{33} & b_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & ib'_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{nn} + ib'_{nn} \end{bmatrix},$$

где величины b'_{kk}, $b_{k,k+1}$ и b_{nn} вещественны. Утверждается, что вещественные части всех характеристических чисел отрицательны, если величины b_{12}, b_{23}, . . , . . . , $b_{n-1,n} - b_{nn}$ все положительны. В противном случае число характеристических чисел с положительными вещественными частями равно числу положительных членов в ряду b_{nn}, $b_{nn}b_{n-1n}$, . . . , $b_{nn}b_{n-1n} \dots b_{23}b_{12}$.

Ф. Р. Гантмахер

8798. Асимптотическое интегрирование обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Хартман, Винтнер (Asymptotic integrations of ordinary non-linear differential equations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 4, 692—724 (англ.)

Обобщение для нелинейного случая прежних исследований авторов (РЖМат, 1956, 4496). Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dy/dt = Jy + F(t, y), \qquad (1)$$

где J — постоянная матрица, y и $F(t, y)$ — столбцевые комплексно-значные векторы, причем $F(t, y)$ непрерывна при $0 \leqslant t < +\infty$, $|y| \leqslant \text{const}$.

Пусть матрица J имеет нормальную форму Жордана; $\lambda(j)$ — собственные значения J; y^{jk} — координаты вектора y, соответствующие j-й клетке и k-й строке этой клетки; $\mu^m = \operatorname{Re}\lambda(m)$ (m — фиксировано); p, q, r — значения j, для которых выполняются соответственно неравенства:

$$\mu(j) < \mu^m, \ \mu(j) = \mu^m, \ \mu(j) > \mu^m, \ L_m = \sum\nolimits_{q,k} |y^{qk}|^2.$$

Если $|F(t, y)|/|y| \to 0$ при $(t, y) \to (+\infty, 0)$ и $\mu^m < 0$, то для каждого $\eta > 0$ $(0 < \eta < 1)$, каковы бы ни были числа y_0^{pk}, y_0^{qk}, подчиненные условиям: $\Sigma_{p,k}|y_0^{pk}|^2 \leqslant \eta\Sigma_{q,k}|y_0^{qk}|^2$, $0 < \Sigma_{q,k}|y_0^{qk}|^2 < \delta(\eta)$, существует решение $y = y(t)$ $(t_0 \leqslant t < +\infty)$, где $t_0 \geqslant T(\eta)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y^{pk}(t_0) = y_0^{pk}$, $y^{qk}(t_0) = y_0^{qk}$ ($y_0^{rk}(t_0)$ — определяются) и такое, что при $t \to +\infty$ имеем:

$$L_j = o(L_m) \text{ для } j \neq m, \ \ln|y(t)| = (\mu^m + o(1))t. \qquad (2)$$

Обратно, если $y(t) \not\equiv 0$ и $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то при некотором $\mu^m \leqslant 0$ выполнены соотношения (2). Эта теорема аналогична результатам Перрона (Perron O., Math. Z., 1929, **29**, 129—160; 1930, **32**, 703—728).

Во второй части работы предполагается, что F удовлетворяет условию: $|F(t, y)| \leqslant \Phi(t, |y|)$, где $\Phi(t, \rho)$ — скалярная непрерывная функция, не убывающая по ρ при t фиксированном, причем при некотором $\mu = \operatorname{Re}\lambda(j)$ выполнено неравенство

$$\int^{\infty} e^{-\mu t} t^{h-j-1} \Phi(t, Ce^{\mu t} t^j)\, dt < +\infty,$$

где C — произвольная положительная постоянная и h — положительное число, не меньшее максимального порядка клеток матрицы J. При этих предположениях получаются более точные асимптотические формулы для решений $y(t)$ системы (1), аналогичные асимптотическим формулам Дункеля для решений линейной системы (Dunkel O., Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., 1902—1903,38, 341—370). Аналогичные результаты получены Д. М. Гробманом (Докл. АН СССР, 1952, **86**, № 1, 19—23). Библ. 18 назв. Б. П. Демидович

8799. О вложении гомеоморфизмов в потоки. Форт (The embedding of homeomorphisms in flows. Fort M. K., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 960—967 (англ.)

Пусть X — топологическое пространство и R — множество действительных чисел. Топологическим потоком на X называется непрерывная функция F, определенная на $X \times R$ с областью значений X, такая, что 1) F_t, $t \in R$, — гомеоморфное отображение пространства X на себя; 2) $F_t(F_s(x)) = F_{t+s}(x)$ для всякого $t \in R$, $s \in R$ и $x \in X$. Здесь $F_t(x) = F(x, t)$ означает функцию от x при фиксированном значении t.

Если для данного топологического пространства X и гомеоморфного отображения f пространства X на себя существует поток F на X, для которого $F_1 = f$, то говорят, что f может быть вложено в F. В настоящей работе в качестве пространства X рассматривается числовой интервал.

Теорема 1. Если f — сохраняющее порядок гомеоморфное отображение интервала J на себя, то можно вложить f в поток F.

Предположим теперь, что функция f подчинена следующим условиям:

I. f — гомеоморфизм полуоткрытого интервала $(a, b]$ на себя;

II. f имеет непрерывную производную на $(a, b]$;

III. $f(x) > x$ при $a < x < b$;

IV. $f'(x) > 0$ при $a < x \leqslant b$;

V. f' — монотонная не возрастающая функция на интервале $(a, b]$. Тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 3. Существует единственный поток F на $(a, b]$ такой, что $F_1 = f$, и такой, что каждая функция F_t непрерывно дифференцируема на $(a, b]$. Сверх того, если g — непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм полуинтервала $(a, b]$ на себя, перестановочный с f, то существует действительное число t такое, что $F_t = g$.

Построен пример, показывающий возможность существования функции f, непрерывно дифференцируемой на замкнутом интервале $(a, b]$ и удовлетворяющей условиям I — V на полуоткрытом интервале $(a, b]$, которая, однако, не может быть вложена в поток непрерывно дифференцируемых функций на замкнутом интервале $[a, b]$.

Теорема 4. Если f — непрерывно дифференцируемая функция на замкнутом интервале $[a, b]$, удовлетворяющая условиям I — V на $(a, b]$, то множество G всех

непрерывно дифференцируемых и сохраняющих порядок гомеоморфизмов g интервала $[a, b]$ на себя для всех g, перестановочных с f, образует группу, изоморфную или группе действительных чисел, или группе целых чисел. А. С. Пархоменко

8800. Об одной теореме полного разделения линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторых свойствах матрицы разделения. Ляшенко Н. Я., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 4, 403—418

Рассматривается система n линейных дифференциальных уравнений, записанная в векторной форме

$$dx / dt = (P(t) + L(t))\, x, \qquad (1)$$

где $P(t) = [p_1(t), \ldots, p_n(t)]$ — диагональная матрица, $L(t)$ — квадратная матрица n-го порядка, определенная, непрерывная и ограниченная при всех вещественных t.

В предположении существования таких положительных постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n-2}$, что при всех t

$$\operatorname{Re} p_1(t) \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \operatorname{Re} p_2(t) \leqslant \gamma_3 < \gamma_4 \leqslant \ldots \leqslant \leqslant \operatorname{Re} p_{n-1}(t) \leqslant \gamma_{2n-3} < \gamma_{2n-2} \leqslant \operatorname{Re} p_n(t).$$

Доказывается следующее утверждение.

Если для всех вещественных t элементы $L_{ik}(t)$ матрицы $L(t)$ удовлетворяют условию

$$|L_{ik}(t)| \leqslant L < 2\gamma / 9n \quad (i, k = 1, \ldots, n),$$

где L и γ — постоянные, причем

$$\gamma = \inf_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ -\infty < t < +\infty}} \operatorname{Re}\, [p_{j+1}(t) - p_j(t)],$$

то всегда можно указать непрерывную и ограниченную для всех t матрицу разделения $B(t)$ с элементами на главной диагонали, равными единице, такую, что замена переменных $x = B(t)\eta$, где η — n-мерный вектор с компонентами $\eta_1, \ldots, \eta_n$ позволяет разделить систему (1) на n независимых уравнений первого порядка

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \left(p_i(t) + \sum_{k=1}^{n} L_{ik}(t)\, B_{ki}(t)\right)\eta_i,$$

интегрируемых в квадратурах.

Далее показывается, что если коэффициенты системы (1) почти периодические, то и матрица разделения $B(t)$ будет почти периодической.

Кроме того, в систему (1) вводится параметр и указывается область изменения параметра, в которой матрица разделения будет аналитической относительно этого параметра.

Случай неполного разделения системы (1) был рассмотрен автором ранее (РЖмат, 1955, 2186, 5767). В. П. Басов

8801. О неустойчивости систем дифференциальных уравнений. Турán (On the instability of systems of differential equations. Turán P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 3—4, 257—270 (англ.; рез. русс.)

Тривиальное решение системы

$$dX_i/dt = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + w_i(X_1, \ldots, X_n, t), \qquad (1)$$

$$w_i(0, \ldots, 0, t) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

называется вполне неустойчивым (Перрон), если существует такое $c > 0$, что для всякого решения, у которого $0 < \Sigma |X_i(0)|^2 < c$, найдется такое $t_0 > 0$, что при $t = t_0$ это решение либо не существует, либо удовлетворяет неравенству $\Sigma |X_i(t_0)|^2 \geqslant c$.

Пусть λ_i суть собственные числа матрицы $\{a_{ij}\}$ и пусть

$$\min_i \operatorname{Re} \lambda_i = L > 0, \quad \max_{ij} |a_{ij}| = c,$$

$$D = [n \ln(4c) + \ln(16n)] / 2L.$$

Теорема. Если для некоторого $a > 0$ через каждую точку области $t \geqslant 0$, $|X_i| \leqslant a$ проходит единственное решение (1) и если в этой области имеем

$$\sum |w_i(X_1, \ldots, X_n, t)|^2 / \sum |X_i|^2 \leqslant e^{-4ncD} / 30\, nD^2,$$

то тривиальное решение вполне неустойчиво

Доказана еще одна теорема близкого содержания. Эти теоремы несколько улучшают результаты Перрона (Perron O., Math. Z., 1929, 29, 129—160).

Р. Э. Виноград

8802. Об устойчивости неустановившихся движений. Разумихин Б. С., Прикл. матем. и механика, 1955, 20, № 2, 266—270

Рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$dx_i / dt = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j,$$

где коэффициенты $p_{ij}(t)$ ограничены, имеют ограниченные первые производные и таковы, что корни уравнения

$$\det_n \| p_{ij}(\varkappa) - \delta_{ij}\lambda \| = 0$$

удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_i(\varkappa) < -\delta < 0$ при $0 < x < \infty$. Пусть $a_{ij}(t)$ — функции, удовлетворяющие равенствам $\sum_{s=1}^{n} [a_{is}(t)\, p_{sj}(t) + a_{js}(t)\, p_{si}(t)] = -\delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ и $\bar{\lambda}_n(t)$ — верхняя грань действительных корней уравнения $\det_n \| da_{ij}/dt - a_{ij}\lambda - \delta_{ij} \| = 0$.

Доказывается, что невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ устойчиво, если существует конечный верхний предел интеграла $\int_0^t \bar{\lambda}_n(\xi)\, d\xi$ $(0 < t < \infty)$.

Эти результаты обобщают теоремы Н. Г. Четаева (Прикл. матем. и механика, 1945, 9, № 3; 1948, 12, № 1), цитируемые автором. Н. Н. Красовский

8803. О теореме Пуанкаре и Малкина. Леймanис Е у г е н е (On a theorem of Poincaré and Malkin. Leimanis Eugene), Trans. Roy. Soc. Canada, 1955, Sec. 3, 49, June, 39—48 (англ.)

Дается обобщение для одного исключительного случая метода Пуанкаре — Малкина разыскания периодических решений неавтономной системы дифференциальных уравнений

$$dx_i / dt = X_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где X_i — аналитические функции относительно переменных x_i и малого параметра μ, и непрерывны и периодичны по t с общим периодом T. Предполагается, что порождающая система

$$dx_i / dt = X_i(t, x_1, \ldots, x_n, 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

допускает периодическое решение, зависящее от k произвольных параметров $(1 \leqslant k < n)$, причем, в отличие от теории Малкина, некоторый функциональный определитель тождественно равен нулю. Б. П. Демидович

8804. О периодических решениях дифференциальных уравнений. Еругин Н. П., Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 1, 148—152

Даются некоторые приемы отыскания периодических решений системы дифференциальных уравнений

$$dx_i / dt = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

в том случае, когда f_i не являются периодическими функциями или когда период решения не соизмерим с периодом функций f_i, если последние периодические. Приводятся достаточные признаки асимптотической устойчивости, а также орбитальной устойчивости периодического решения системы (1). Работа непосредственно примыкает к исследованиям Массера (Massera J., Bol. Fac. Ingr., Mago 1950, 4, № 1; РЖМат, 1956, 415).

Б. П. Демидович

8805. Некоторые методы качественного исследования «в большом» для систем дифференциальных уравнений. Немыцкий В. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 229—230

8806 К. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Коддингтон, Левинсон (Theory of ordinary differential equations. Coddington E. A., Levinson N., New York, London, McCraw-Hill 1955, XII, 429 p. 64 sh.) (англ.)

Курс дифференциальных уравнений, отличающийся своеобразным подбором и широким охватом материала. Наряду с классическими приводятся результаты, опубликованные в последние годы, а также новые результаты авторов. Для изложения характерны четкость и лаконичность. Широко используются матричные и векторные обозначения

В книге 17 глав. Гл. 1 «Существование и единственность решений» и гл. 2 «Существование и единственность решений» (продолжение)» содержат теоремы существования и единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в действительной и в комплексной областях, теоремы о продолжимости решений, о характере зависимости решений от начальных значений и параметров. Наряду с теоремой Коши-Пеано, излагается теорема существования Каратеодори. Приводятся весьма общие достаточные условия единственности решения задачи Коши и сходимости последовательных приближений Пикара. В случае неединственности формулируются некоторые результаты относительно структуры совокупности интегральных кривых, выходящих из одной точки.

В гл. 3 излагается общая теория линейных дифференциальных уравнений и систем. Коэффициенты предполагаются комплексными функциями вещественного переменного t. Для систем с постоянными и периодическими коэффициентами анализируется и структура фундаментальной матрицы. Для систем с вещественными коэффициентами, имеющими предельные значения на бесконечности, исследуется асимптотическое поведение решений.

В двух следующих главах рассматриваются линейные системы и уравнения, коэффициенты которых суть однозначные аналитические функции комплексного переменного z с изолированными особенностями. Указывается общая структура фундаментальной матрицы в окрестности особой точки, дается классификация особенностей: особые точки 1-го и 2-го рода, регулярные и иррегулярные особые точки. Пусть w — вектор, $A(z)$ — матрица. Если в системе

$$w' = A(z)\, w \qquad (1)$$

$A(z) = (z - z_0)^{-\mu-1} \widetilde{A}(z)$ (μ — целое, $\widetilde{A}(z)$ — аналитическая для $|z - z_0| < a$, $\widetilde{A}(z_0) \neq 0$), то при $\mu = 0$ точка $z = z_0$ называется особой точкой 1-го рода для системы (1), при $\mu \geqslant 1$ — особой точкой 2-го рода. В гл. 4, рассматриваются особенности первого рода, в гл. 5 особенности второго рода. В качестве особой рассматривается точка $z = \infty$ и система имеет вид

$$w' = z^r A(z)\, w,$$

$r \geqslant 0$ — целое, A — аналитическая для $|z| > R$, $A_0 = A(\infty) \neq 0$. Для случая, когда собственные значения A_0 различны, строятся решения в виде формальных рядов, доказывается существование решений, имеющих эти формальные ряды асимптотическими разложениями. В случае произвольной A_0 приводится (без вывода) общая структура формальных решений, указывается на возможность доказательства их асимптотичности в некоторых секторах плоскости z.

Гл. 6 «Асимптотическое поведение линейных систем, содержащих большой параметр» имеет дело с системами вида

$$x' = \rho^r A(t, \rho)\, x, \qquad (2)$$

$a \leqslant t \leqslant b$, ρ — комплексное, $|\rho| \geqslant R$, $r \geqslant 1$ (целое),

$$A(t, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} A_k(t),$$

$A_k(t)$ класса C^N на $[a, b]$, $0 \leqslant N \leqslant +\infty$ (целое). При известных предположениях относительно N и характеристических корней матрицы $A_0(t)$ (в их число входит простота этих корней на $[a, b]$) строятся формальные матричные решения (2) вида Pe^Q, где

$$P = \sum_{l=0}^{\infty} \rho^{-l} P_l(t), \quad Q = \rho^r Q_0(t) + \ldots + Q_r(t), \qquad (3)$$

Q_i — диагональные матрицы, $P_i, Q_i \in C^1$ на $[a, b]$, и доказывается, что эти формальные ряды дают асимптотическое представление фактических решений (2) в некоторых областях плоскости z. При наличии у $A_0(t)$ кратных на $[a, b]$ корней параметр ρ в (3) заменяется на $\rho^{1/k}$, k — целое. Методы гл. 6 близки к методам предшествующей главы.

Гл. 7—12 посвящены краевым задачам. Гл. 7 «Самосопряженные задачи о собственных значениях на конечном интервале» содержит классическую теорию таких задач для уравнения n-го порядка.

В гл. 8 «Теоремы сравнения и колебательности для линейных уравнений второго порядка и их приложения» излагаются задача Штурма — Лиувилля, самосопряженные задачи с периодическими и апериодическими граничными условиями. Теория прилагается к разысканию областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров a, b для уравнения

$$(p(t)\, x')' + [ar(t) + bq(t)]\, x = 0,$$

p, p', r и q — непрерывные ω-периодические, $p > 0$, $r > 0$.

В гл. 9 «Сингулярные самосопряженные краевые задачи для уравнения второго порядка» рассматриваются задачи для полубесконечного и бесконечного интервалов. Определяются операторы типа предельной точки и предельного круга на бесконечности. Сначала исследуется случай оператора типа предельной точки на бесконечности: даются достаточные условия принадлежности оператора к этому типу, излагаются теоремы разложения и полноты. Затем изучаются операторы типа предельного круга на бесконечности. В гл. 10 «Сингулярные краевые задачи для уравнений n-го порядка» теория гл. 9 распространяется на уравнения высших порядков.

В гл. 11 «Алгебраические свойства линейных краевых задач на конечном интервале» для уравнений n-го порядка выводятся необходимые и достаточные условия сопряженности и самосопряженности граничных условий, наличия k ($0 \leqslant k \leqslant n$) линейно независимых решений однородной задачи, существования решения неоднородной задачи. Устанавливается связь между числами ли-

нейно независимых решений однородных сопряженных задач. В гл. 12 «Несамосопряженные краевые задачи» рассматривается уравнение n-го порядка на конечном интервале. При известных условиях доказывается существование функции Грина. Методом, использующим интеграл Коши и теорему о вычетах, выводится теорема разложения.

В гл. 13 «Асимптотическое поведение нелинейных систем: устойчивость» изучается поведение решений для систем вида

$$x' = Ax + f(t, x), \qquad (4)$$

где x — вектор, A — вещественная постоянная (или периодическая) матрица, f — вещественная вектор-функция, подчиненная тем или иным условиям. Даются критерии асимптотической устойчивости, условной устойчивости и неустойчивости нулевого решения, асимптотической устойчивости и асимптотической орбитальной устойчивости периодического решения. Рассматривается лишь локальная устойчивость. Понимается она в смысле Ляпунова, хотя так и не называется (по-видимому, в силу общей установки авторов, не уделять внимания исторической стороне теории). Методы Ляпунова, а также сомнительные случаи задачи об устойчивости движения не излагаются. Для случая постоянной A исследуется структура многообразия, покрытого 0-кривыми системы (4), и его дифференциальные свойства, а также характеризуется асимптотическое поведение решений системы

$$x' = Ax + f(t,x) + g(t, x),$$

где собственные значения A имеют отрицательные вещественные части, $f, g \in C$ для малых $|x|$ и $t \geqslant 0$, $|f| \leqslant \varepsilon |x|$ для $|x| \leqslant \delta_\varepsilon$ и $t \geqslant t_\varepsilon$, $g(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно относительно x

Следующая глава «Возмущение систем, имеющих периодическое решение» трактует метод малого параметра в теории нелинейных колебаний. Сначала рассматриваются неавтономные и автономные системы общего вида:

$$x' = f(t,x,\mu), \qquad (5)$$

где f и f'_x — вектор-функции класса C в некоторой области пространства $(t, x, \mu) : (t, x) \in V, |\mu| \leqslant \mu_0$, при $\mu = 0$ (5) имеет периодическое решение периода T, f предполагается периодической с тем же периодом T. Формулируются условия, гарантирующие сохранение периодического решения при малых значениях $|\mu| \neq 0$ и его единственность, а также условия, обеспечивающие сохранение асимптотической устойчивости периодического решения (по Ляпунову или орбитальной). Эти условия налагаются на первую вариацию невозмущенной системы относительно данного периодического решения ее. Затем изучаются системы, первая вариация которых имеет постоянные коэффициенты.

Гл. 15—17 посвящены двумерным автономным системам. В гл. 15 «Теория возмущений двумерных, вещественных автономных систем» выясняются условия, при которых изолированная особая точка нелинейной системы и ее линейного приближения принадлежит к одному и тому же типу (в смысле классификации Пуанкаре). В гл. 16 рассматривается теория Пуанкаре — Бендиксона двумерных автономных систем, в гл. 17 — дифференциальные уравнения на торе.

В конце каждой главы помещена серия задач, снабженных указаниями. Многие из них дают дополнительный теоретический материал. Краткая библиография — 127 названий — разбита по главам. В тексте ссылки на источники отсутствуют. А. Ф. Андреев

8807 К. Устойчивость движения. Изд. 2-е, испр. Четаев Н. Г. М., Гостехиздат, 1955, 207 стр., 7 р

В монографии излагаются основы теории устойчивости в смысле Ляпунова. Основное место уделяется тем исследованиям А. М. Ляпунова и автора книги, которые являются наиболее важными для приложений.

В первой и второй главах ставится задача устойчивости и излагаются теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости и неустойчивости. В третьей главе рассматриваются вопросы устойчивости равновесий при потенциальных силах. Четвертая глава посвящена вопросам устойчивости линейных систем. В третьей и четвертой главах даются необходимые сведения из линейной алгебры. В пятой главе изучается действие возмущающих сил на равновесие. В частности, подробно рассмотрено влияние диссипативных и гироскопических сил. Шестая глава посвящена устойчивости по первому приближению. В седьмой и восьмой главах рассматриваются критические случаи (случай одного нулевого корня и случай пары чисто мнимых корней). В девятой главе рассматриваются вопросы устойчивости неавтономных систем, здесь вводится понятие характеристических чисел функций и решений и излагаются теоремы об устойчивости по первому приближению.

Изложение материала сопровождается большим количеством содержательных примеров. Подробно даются сведения, необходимые для приложения излагаемой теории к вопросам аналитической механики.

Е. А. Барбашин

8808 Д. Периодические и приводимые нелинейные системы. Кинг (Periodic and reducible nonlinear differential systems. King Richard Frederick. — Doct. diss. Univ., Illinois, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 11, 2228 (англ.)

Весьма краткое изложение диссертации. Речь идет о линейных системах с нелинейными добавками, подчиненными условию Липшица. Название относится к линейной части. Основное внимание уделено большим значениям независимой переменной. Результат: если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть характеристические показатели решений линейной части, и существует такое m, $1 \leqslant m \leqslant n$, что

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m < 0, \; 2\lambda_m < \lambda_1,$$

то для решений нелинейной системы выполняется «линейная гипотеза». Смысл последнего термина не разъяснен. Р. Э. Виноград

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

8809. Об одном классе линейных уравнений в частных производных. Блондель (Sur une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires. Blondel Jean-Marie), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 11, 1181—1183 (франц.)

Для уравнения

$$\partial^{2n} z / \partial x^n \partial y^n + P(x, y, \partial/\partial x, \partial/\partial y)\, z = \Phi(x, y), \qquad (1)$$

где P — дифференциальный полином порядка не выше $2n-2$, ищется решение, удовлетворяющее условиям

$$\partial^i z(x, 0) / \partial y^i = f_i(x), \quad \partial^i z(0, y)/\partial x^i = g_i(y), \; i = 0, 1, \ldots, n-1;$$

f_i, g_i — заданные суммируемые функции. Интегрированием по частям задача приводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Отсюда разрешимость и единственность задачи. Для однородного уравнения (1) построено фундаментальное решение в смысле Л. Шварца.

Более подробно рассмотрено уравнение (1) с постоянными коэффициентами и уравнение (1) специального

вида

$$A_0 z + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{A_{i-1}}{\alpha(x)\,\beta(y)} + A_i\right]\frac{\partial^{2i} z}{\partial x^i \partial y^i} + \frac{A_{n-1}}{\alpha(x)\,\beta(y)}\frac{\partial^{2n} z}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

где α, β — суммируемые функции, A_i — постоянные. В этих случаях получено общее решение. Доказательств нет. Б. Боярский

8810. Замечание о «некорректных» задачах для уравнений с частными производными. Йон (A note on «improper» problems in partial differential equations. John Fritz), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 4, 591—594 (англ.)

Рассматривается задача Коши для гармонической функции, зависящей от трех переменных. Пусть D — область с границей T, достаточно регулярной для того, чтобы существовала функция Грина $K(P, Q)$, обращающаяся в нуль для $Q \in T$, S — поверхность класса C^2, разделяющая D на две области D' и D'', а границу T — на T' и T''. Пусть S' — пересечение D и S. В предположении существования гармонической функции u в замыкании D' с данными Коши $u = f$ и $u_n = g$ на S' доказывается следующее утверждение. Пусть Γ_M — класс таких гармонических функций, удовлетворяющих условию $|u| \leqslant M$, R — некоторая замкнутая подобласть $D' + S'$, тогда решение $u \in \Gamma_M$ непрерывно зависит от f и g в следующем смысле: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, M, R)$ такое, что для u и $u' \in \Gamma_M$, $|u - u'| < \varepsilon$ в R, если $\|f - f'\|_2 < \delta$, $\|g - g'\|_2 < \delta$ на S', где $\|f\|_2$, как обычно, означает максимум абсолютных значений f и ее производных порядка $\leqslant 2$ в рассматриваемой области. В. Н. Масленникова

8811. Метод осевой симметрии для уравнений в частных производных. Уэйнстейн (The method of axial symmetry in partial differential equations. Weinstein A.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali 1954, Roma, 1955, 86—96 (англ.)

Автор реферирует работы ряда авторов, посвященные решению задачи Коши для уравнения

$$\partial^2 u / \partial y^2 + k\partial u / y\partial y = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u / \partial x_m^2, \quad -\infty < k < +\infty,$$

в том числе и собственные работы, причем начальные данные заданы на гиперплоскости $y = 0$; автор указывает, что благодаря этим работам проблема решена полностью. На этом основании автор в реферированной им работе получает решение проблемы излучения для многомерного волнового уравнения. Ф. И. Франкль

8812. К понятию сопряженных линейных граничных задач для уравнений с частными производными. Чиммино (Sulla nozione di sistema differenziale aggiunto per i problemi ai limiti lineari in più variabili. Cimmino Gianfranco), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 223—238 (итал.)

Пусть D — связная плоская область с границей FD, обладающей кусочно-непрерывной кривизной. Устанавливается, что суммируемая функция f, удовлетворяющая при любом полиноме $\omega(x, y)$ условию

$$\int_D f L\omega\,dxdy \equiv \int_D f(\Delta^m\omega + p_1\Delta^{m-1}\omega + \ldots + p_{m-1}\Delta\omega + p_m\omega)\,dxdy = 0,$$

совпадает почти всюду с непрерывной функцией v, для которой справедлива некоторая общая теорема о среднем. Отсюда следует, что v является классическим или обобщенным (в зависимости от гладкости p_i) решением сопряженного уравнения $L^*v = 0$. Если при любом $\omega(x, y)$ и некоторой системе функции φ_i

$$\int_D f L\omega\,dxdy + \sum_{i=1}^{m}\int_{FD}\varphi_i\left(\alpha_{i1}\frac{\partial\Delta^{m-1}\omega}{\partial n} + \beta_{i1}\Delta^{m-1}\omega + \ldots + \alpha_{im}\frac{\partial\omega}{\partial n} + \beta_{im}\omega\right)ds = 0,$$

то f совпадает почти всюду с решением v уравнения $L^*v = 0$, удовлетворяющим соответствующим граничным условиям. Затем рассматривается случай, когда D является системой из m областей. Указывается система уравнений специального вида, эквивалентная уравнению $Lu = 0$. А. А. Дезин

8813. К теории верхней и нижней границ в граничных задачах. Фужита (Contribution to the theory of upper and lower bounds in boundary value problems. Fujita Hiroshi), J. Phys. Soc. Japan, 1955, 10, № 1, 1—8 (англ.)

Пусть T — линейный оператор, определенный на множестве $\mathfrak{D}$ гильбертова пространства H и переводящий D в часть второго гильбертова пространства H'; T^* — сопряженный с T, определенный вместе с областью определения $\mathfrak{D}^* \subset H'$ наличием равенства

$$(Tu, v)_{H'} = (u, T^*v)_H$$

для любых $u \in D$, $v \in \mathfrak{D}^*$. Вообще T^*T есть самосопряженный оператор в H. Для ряда самосопряженных дифференциальных операторов, определенных в $L_2(\mathfrak{D})$ (D — конечная область плоскости (x, y), S — ее граница), указаны разложения T^*T и соответственно H' и $\mathfrak{D}^*$.

Доказываются

Теорема 1. Пусть u_0 есть решение уравнения $T^*Tu = f$, $f \in H$. Тогда для любых u, v таких, что $u \in \mathfrak{D}$, $T^*v = f$, имеет место неравенство

$$2(u, f) - \|Tu\|^2 \leqslant \|Tu_0\|^2 \leqslant \|v\|^2.$$

Теорема 2. Пусть имеют место условия теоремы 1. Пусть $u' \in \mathfrak{D}$, $v' \in \mathfrak{D}^*$ и $T^*v' = g$. Тогда

$$\left|(u_0, g) - \frac{1}{2}[(u, g) + (f, u') - (Tu, Tu') + (v, v')]\right| \leqslant \frac{1}{2}\|Tu - v\| \cdot \|Tu' - v'\|.$$

Если $H = L_2(D)$, T — дифференциальный оператор, теорема 1 дает двустороннюю оценку нормы Tu_0; теорема 2 дает двустороннюю оценку для значения u_0 в точке $P \in D$, если положить (после предельного перехода) $g = \delta_p$ (δ_p — функция Дирака в точке P); для последнего случая указаны общие соображения по улучшению оценок и приведен численный пример.

Х. Л. Смолицкий

8814. Об одной квазилинейной граничной задаче. Дафф (A quasilinear boundary value problem. Duff G. F. D.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1955, sec. 3, 49, June, 7—17 (англ.)

Внутри некоторой конечной области D N-мерного пространства x^i ($i = 1, \ldots, N$), ограниченной аналитической поверхностью B, рассматривается уравнение $\Delta u = F(x, u)$, где Δ — оператор Бальтрами — Лапласа, образованный аналитическим и симметричным контравариантным тензором, определенным на $D + B$. Функция F предполагается аналитической и удовлетворяющей в $D + B$ условиям: 1) $F(x, 0) = 0$; 2) $F'_u(x, u) \geqslant \delta > 0$, где δ — определенное число.

Для рассматриваемого уравнения ищется решение, удовлетворяющее на B нелинейному смешанному усло-

вию $\partial u / \partial n + B(x, u) = f(x)$. Функция f предполагается непрерывно дифференцируемой и функция B удовлетворяет условиям $B(x, 0) \geqslant 0$; $B'_u(x, u) > 0$.

В этих предположениях доказывается теорема. Существует единственное решение поставленной задачи, аналитическое в D.

С помощью функции Грина соответствующей линейной задачи автор строит систему интегро-дифференциальных уравнений, которую решает методом последовательных приближений. В заключение отмечается возможность обобщения результата на граничные условия вида $B(x, \partial u / \partial n, u, f(x)) = 0$, где B должно удовлетворять некоторым неравенствам. Библ. 6 назв.

А. И. Кошелев

8815. О решении задачи Коши для регулярных систем линейных уравнений в частных производных. Костюченко А. Г., Шилов Г. Е., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 141—148

Рассматривается система линейных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, t\right) u(x, t) \qquad (1)$$

с начальными условиями: $u(x, 0) = u(x)$. Здесь $u(x, t)$ — искомая m-мерная вектор-функция, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка N-мерного пространства, а $L\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, t\right)$ — матрица, составленная из линейных дифференциальных операторов с коэффициентами, зависящими только от переменной t. Применяя преобразование Фурье, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, двойственную системе (1)

$$dQ(s, t_0, t) / dt = L(s, t) Q(s, t_0, t).$$

Пусть $Q(s, t_0, t_0) = E$, где E — единичная матрица, а $s = (s_1, \ldots, s_N)$ — точка двойственного пространства. Пусть p — наибольшая из степеней многочленов, входящих в матрицу $L(s, t)$, тогда $Q(s, t_0, t)$ является целой аналитической функцией s порядка роста $p_0 \leqslant p$ (Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., РЖМат, 1955, 3291). Число p_0 называется приведенным порядком системы (1). Рассматривается комплексное пространство $s = (s_1, \ldots, s_N) = (\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_N + i\tau_N) = \sigma + i\tau$. Система (1) называется регулярной, если существует такое $q > 0$, что при всяком фиксированном τ имеет место неравенство

$$\| Q(s, t_0, t) \| \leqslant C_1 e^{c|\tau|^{p_0}} (1 + |s|^q). \qquad (2)$$

Доказывается теорема: Если система (1) регулярна и начальная вектор-функция $u(x)$ обладает непрерывными производными до порядка $q_0 = q + \left[\frac{N}{2}\right] + 2$, каждая из которых удовлетворяет неравенству $|P(D) u(x)| < C_1 e^{\varepsilon |x|^{p'_0}}$ при любом $\varepsilon > 0$ (здесь $P(D)$ — оператор дифференцирования до порядка q_0, p'_0 — число двойственное приведенному порядку p_0, т. е. $1/p'_0 + 1/p_0 = 1$), то решение, найденное в обобщенных функциях, будет обычной функцией. Если $u(x)$ обладает $q_0 + p$ непрерывными производными, то найденная обычная функция будет классическим решением.

Теорема единственности для системы (1) установлена в упомянутой выше работе И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова в классе функций

$$|u(x, t)| \leqslant C_1 e^{c|x|^{p'_0 - \varepsilon}}, \text{ где } \varepsilon > 0. \qquad (3)$$

В случае регулярной системы в неравенстве (3) можно положить $\varepsilon = 0$.

Если неравенство (2) выполнено только при $\tau = 0$, то это условие, как показал И. Г. Петровский (Бюлл. МГУ, 1938, № 7), является необходимым и достаточным условием корректности постановки задачи Коши. И. Г. Петровский рассматривал класс ограниченных функций.

С. А. Гальперн

8816. О непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений с частными производными от начальных данных и о связи задачи Дирихле и задачи Неймана с задачей Коши. Арешев М. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, вып. 13, 129—134

Рассматривается система

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{\nu ik} \frac{\partial u_k}{\partial z_i} + \sum_{k=1}^{m} b_{\nu k} u_k + c_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

где $a_{\nu ik}$, $b_{\nu k}$, c_ν — аналитические функции комплексных переменных $t_1 z_1, \ldots, z_n$, заданные в окрестности P точки $t = z_1 = \ldots = z_n = 0$; $u_1, \ldots, u_m$ — неизвестные функции. Предполагается, что в окрестности P для начальных значений

$$u_\nu |_{t=0} = \varphi_\nu(z_1, \ldots, z_n), \quad \nu = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

справедлива теорема Ковалевской.

Исследуется вопрос о зависимости решения (1) от начальных данных (2). Доказывается, что существует такая окрестность $Q \subset P$, в которой справедлива

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что в Q решение задачи Коши (1), (2) изменится по модулю меньше, чем на ε, если на Q функции φ_ν и все их производные $\partial \varphi_\nu / \partial z_i$ изменятся по модулю меньше, чем на δ.

Далее рассматривается обобщенная задача Коши в комплексной области и изучается для нее аналогичный вопрос. На одном примере, построенном Адамаром, показывается, что задача Коши, корректно поставленная в комплексной области, может оказаться не корректно поставленной, если ограничиться рассмотрением действительных функций действительного переменного. Рассматривается вопрос о правильной постановке задачи Коши в подобных случаях и указывается возможность выбора из семейства решений всех возможных задач Коши решений задач Дирихле и Неймана.

А. И. Каландия

8817. О некоторых системах квазилинейных уравнений в частных производных. Эзра (Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles quasi linéaire. Ezra Jacques), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 3, 270—272 (франц.)

Для квазилинейной системы вида

$$\frac{\partial X^i(x, y, u, v)}{\partial x} = \frac{\partial Y^i(x, y, u, v)}{\partial y} + Z^i(x, y, u, v), \quad i = 1, 2, \qquad (1)$$

строится система сингулярных интегральных уравнений, не содержащих производных функций X^i и Y^i, линейных относительно X^i и Y^i.

В эти уравнения входит некоторая функция $f(M, M_0)$, которая может быть выбрана с большим произволом H и H_0 двух точек, дважды непрерывно дифференцируема при $M \neq M_0$ и обладающая логарифмической особенностью при $M = M_0$. Упомянутая система интегральных соотношений получается из (1) применением формул Грина к некоторой комбинации (1) и f, если предварительно выделить особенность функции f. Автор

предлагает дальше преобразовывать полученные уравнения при помощи подходящего подбора функции f. В двух приведенных частных примерах выписывается вид полученных соотношений. Никаких выводов относительно решения граничных или каких-либо других задач для системы (1) не приводится. Б. Боярский

8818. Об одном методе интегрирования системы уравнений в полных дифференциалах. Яблоков В. А., Науч. тр. Казанск. ин-та инж.-строит. нефт. пром., 1954, № 2, 119—131

Рассматриваются различные случаи применения известного метода Майера (Mayer, Math. Ann., 1872, 5, 448—470) для интегрирования вполне интегрируемых систем уравнений в полных дифференциалах. Указаний на литературу вопроса и ссылки на указанный метод в статье нет.

Примечание референта. По рассматриваемому вопросу см. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 1921, Paris, Hermann; Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1939, Харьков, ОНТИ Украины. Д. Б. Тополянский

8819. О сингулярной задаче Коши для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу с двумя пространственными переменными. Диас, Лад-форд (On the singular Cauchy problem for a generalization of the Euler-Poisson-Darboux equation in two space variables. Diaz J. B., Ludford G. S. S.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 38, 33—50 (англ.)

Записывается «элементарное решение» для уравнения, сопряженного уравнению

$$L_m w \equiv \Delta w - w_{tt} - kt^{-1} w_t = 0, \quad t > 0; \quad k > 0;$$
$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \qquad (1)$$

оно дает возможность получить по формуле Адамара решение (для $t > t_0$) задачи Коши $w|_{t=t_0} = 0$, $w_t|_{t=t_0} = f(x_1, x_2)$, $t_0 > 0$, относящейся к уравнению (1), в виде сходящегося (при $m = 2$) интеграла. Пользуясь этим решением и оценками для $w, w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_1x_1}, w_{x_1x_2}, w_{x_2x_2}$, удается представить единственное решение $u(x_1, x_2, t)$ сингулярной задачи Коши для неоднородного уравнения $L_2 u = F(x_1, x_2, t)$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ в виде сходящегося несобственного интеграла Дюамеля. При помощи этого представления записывается интегральное уравнение, эквивалентное сингулярной задаче Коши для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона— Дарбу

$$L_2 v - hv = 0, \quad t > 0, \quad k > 0, \qquad (2)$$
$$v|_{t=0} = g, \quad v_t|_{t=0} = 0. \qquad (3)$$

Применяя метод последовательных приближений, авторы устанавливают (в предположении, что 1) функция $h(x_1, x_2, t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ вместе с ее производными $h_{x_1}, h_{x_2}, h_{x_1x_1}, h_{x_1x_2}, h_{x_2x_2}$ и 2) функция $g(x_1, x_2)$ дважды непрерывно дифференцируема, если $k \geqslant 1$ и трижды непрерывно дифференцируема, если $0 < k < 1$) существование и единственность решения $v(x_1, x_2, t)$ (непрерывного при $t \geqslant 0$ вместе с его производными $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_1x_1}, v_{x_1x_2}, v_{x_2x_2}$) упомянутого интегрального уравнения, а следовательно, и решения задачи (2), (3). Рассмотрение ограничивается случаем $k > 0$, поскольку при $k < 0$ единственность решения задачи (2), (3) нарушается уже при $h = 0$, при k же, равном нулю, исчезает сингулярность задачи. Показано также, что задача (2), (3) поставлена корректно. Авторы отмечают неприменимость метода в случае, если в уравнение (2) включить линейно производные 1-го порядка по x_1 и x_2 (хотя бы и с регулярными коэффициентами). Библ. 17 назв. М. Н. Олевский

8820. О преобразованиях прикосновения. Рахайский (Sur les transformations de contact. Rachajsky B.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 9, 896—909 (франц.)

Рассматривая в применении к уравнению $\Phi(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ преобразование прикосновения $x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $z' = \sigma(x_1, \ldots, x_n, z, x_1', \ldots, x_n')$, автор исследует вопросы о построении всех уравнений, переходящих в конечные (вида $F(x_1', \ldots, x_n', z') = 0$) при заданном преобразовании, и о построении преобразования, переводящего заданное уравнение в конечное. Последний, более сложный вопрос приводится к интегрированию уравнения характеристик и тесно связан с теорией Якоби, развитой Н. Салтыковым. Аналогичные вопросы исследуются для системы в инволюциях вида $\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, m < n)$. Методы иллюстрируются на специально подобранных примерах. Все рассмотрения имеют формальный характер. А. Д. Мышкис

8821. Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа с малым параметром при старших производных. Каменомостская С. Л., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 5, 345—360

Рассматривается первая краевая задача для уравнения

$$\varepsilon \Delta u + A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = D(x, y) \qquad (1)$$

в области G. Кроме гладкости, на коэффициенты налагается единственное ограничение $C(x, y) < 0$. Через Γ_1 обозначается множество точек Γ границы G таких, что в них характеристики уравнения

$$A(x, y)\, \partial U / \partial x + B(x, y)\, \partial U / \partial y + C(x, y)\, U = D(x, y) \qquad (2)$$

выходят из $\overline{G}$ при продолжении в положительном направлении.

Существует единственное ограниченное решение $U(x, y)$ уравнения (2), принимающее на $\widetilde{\Gamma}_1$ заданные значения. Характеристики, которые касаются Γ в точке P_0 и при продолжении в положительном направлении не выходят из $\overline{G}$ в некоторой окрестности точки P_0, называются особыми. Доказана теорема: Решения уравнения (1) $u_\varepsilon(x, y)$, принимающие на Γ заданные значения $\varphi(P)$, при ε, стремящемся к нулю, в любой замкнутой области, не содержащей особых характеристик и точек $\Gamma \setminus \widetilde{\Gamma}_1$, равномерно сходятся к $U(x, y)$, где $U(x, y)$ — ограниченное решение, принимающее на $\widetilde{\Gamma}_1$ значения $\varphi(P)$. А. М. Ильин

8822. О равномерных условиях Дини в теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Хартман, Винтнер (On uniform Dini conditions in the theory of linear partial differential equations of elliptic type. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1955, 77, № 2, 329—354 (англ.)

Устанавливаются априорные оценки модулей абсолютных значений и модулей непрерывности первых производных решения первой краевой задачи для уравнения

$$(Au_x + B_1 u_y)_x + (B_2 u_x + Cu_y)_y = 0. \qquad (1)$$

Предполагается, что в некоторой окрестности начала координат коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию типа $|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| < K\alpha(r)$, $r = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2}$,

где $K = \text{const}$, $\alpha(r)$ — неубывающая функция такая, что

$$\int_{+0} r^{-1}\alpha(r)\,dr < +\infty. \quad (2)$$

Пусть K превышает по модулю коэффициенты (1) и пусть еще $A \geqslant K^{-1}$, $AC - \frac{1}{4}(B_1+B_2)^2 \geqslant K^{-1}$. Пусть $\Phi(x,y)$ — произвольная функция класса C^2 в окрестности начала. Основной результат работы формулируется в виде следующей леммы: Существуют такие две функции $R_0(K)$ и $C(K)$, что любое (обобщенное) решение уравнения (1) класса C^1 такое, что $u = \Phi$, на C, где C — окружность радиуса $R \leqslant R_0(K)$ с центром в начале, удовлетворяет внутри C и на C неравенствам

$$|f| \leqslant c(K)K_2, \quad |f(x,y) - f(\overline{x},\overline{y})| < c(K)K_2\beta(r,R),$$

где f обозначает любую производную первого порядка решения $u(x,y)$, а K_2 — верхний предел функции Φ и ее первых и вторых производных внутри окружности C. $c(K)$ не зависит от $R \leqslant R_0(K)$. Функция $\beta(r;R)$ определяется полностью (явными формулами) через $\alpha(r)$, $\beta(r) \to 0$ при $r \to 0$. Интересно то, что, вообще говоря, β не удовлетворяет уже условию (2). В конце работы приведен пример, показывающий, что, вообще говоря, полученные оценки для β являются наилучшими.

Результат авторов является обобщением результатов Корна и Лихтенштейна о том, что в случае $\alpha(r) = r^\lambda$ можно принять $\beta(r) = r^\lambda$. Доказательство довольно громоздкое. Оно опирается на целый ряд лемм, уточняющих соответствующие леммы Корна, Лихтенштейна и Хопфа (Hopf E., Math. Z., 1932, **34**, 194—233). В частности, выводятся оценки для зависящего от трех действительных параметров a, b, c, семейства функций Грина для уравнения второго порядка $aw_{xx} + 2bw_{xy} + cw_{yy} = 0$, $1/k \leqslant a$, $c \leqslant K$, $ac - b^2 \geqslant 1/K$ внутри окружности C при нулевом краевом условии.

Используя оценки леммы 1, при помощи семейств равностепенно непрерывных функций, авторы доказывают существование обобщенных решений класса C^1 первой краевой задачи для уравнения (1). Так же, как у Лихтенштейна (Lichtenstein L., Bull. Internat. Acad. sci. Cracovie, 1916, ser. A, 192—217), отсюда получаются уточненные условия, при которых существует непрерывно дифференцируемое преобразование независимых переменных с отличным от нуля якобианом, переводящее риманову метрику $ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$ к нормальному конформному виду $ds^2 = \tau^2(du^2 + dv^2)$.

В добавлении к статье указывается прием построения (подробностей не приводится) такой равномерно непрерывной плотности в единичном круге, для которой соответствующий логарифмический потенциал имеет всюду ограниченные производные второго порядка, которые, однако, терпят разрывы в некоторых точках. В статье имеются опечатки и неточности в нумерации формул и сносок. Б. Боярский

8823. Вырождающиеся эллиптические уравнения. Михлин С. Г., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 8, 19—48

Развернутое изложение результатов, опубликованных ранее автором (РЖМат, 1954, 2963). М. И. Вишик

8824. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. В и ш и к М. И., Матем. сб., 1954, **35**, № 3, 513—568

Рассматриваются краевые задачи для эллиптического уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial y}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = h(x),$$

у которого квадратичная форма коэффициентов

$$F(x,\xi) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \quad (x = (x_1,\ldots,x_n),\ \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n))$$

может выраждаться на границе области. Часть результатов (в менее общем виде) содержится в предыдущих работах автора (РЖМат, 1955, 3763, 3764). Приведем результаты, относящиеся к первой краевой задаче. Граница конечной области $D \subset R^n$ (в $Dx_n > 0$) содержит часть Γ_0 плоскости $x_n = 0$. Остальная часть границы Γ_1 кусочно-гладкая. Вводится класс $\dot{\Omega}$ — замыкание в метрике

$$\{Gu, Gu\} = \int_D \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx$$

множества функций в D, обращающихся в нуль вблизи Γ и имеющих кусочно-непрерывные ограниченные производные. Коэффициенты $a_{ik}(x)$ непрерывны в $\overline{D}$ и $F(x,\xi) > 0$ $(x \in D)$, $F(x_0,\xi) \geqslant 0$ $(x_0 \in \Gamma_0)$ Пусть $l(x) = (l_1(x),\ldots,l_n(x))$ — какое-либо непрерывно дифференцируемое поле направлений в $D' \supset \overline{D}$, $|l| = 1$, $l_n(x) \geqslant \gamma^2 > 0$, $F(x,\xi)$ и $l_n(x)$ подчиняются условиям (или некоторым из них): для $x \in \overline{D}$

$$0 \leqslant x_n^\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\xi_i\right)^2 \leqslant C^2F(x,\xi), \quad (\alpha \geqslant 0) \quad (1)$$

$$c_1^2 x_n^\alpha \leqslant a_{nn}(x) \leqslant C_1^2 x_n^\alpha, \quad (2)$$

$$x_n^\beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant C_2^2 F(x,\xi) \quad (\beta \geqslant \alpha) \quad (3)$$

и в некоторой окрестности Γ_0

$$b_n(x) \geqslant -C_3^2\varphi(x_n,\alpha), \quad (4)$$

где $\varphi(x_n,\alpha) = x_n^{\alpha-1}$ $(\alpha < 1)$, $\varphi(x_n,\alpha) = |\ln x_n|^{-1} \times |\ln|\ln x_n||^{-\varepsilon_1}$ $(\alpha = 1)$, $\varphi(x_n,\alpha) = x_n^{\alpha-1}|\ln|\ln x_n||^{-\varepsilon_2}$ $(\alpha > 1)$, $\varepsilon_1 > 0$.

Доказывается теорема вложения: 1. Если выполнено (1), то $\dot{\Omega}$ вложимо в $L_D^2(\sigma)$ и оператор вложения ограничен. Вес $\sigma(x) > 0$ при $x_n > 0$ и $\sigma(x) = O(x_n^{\alpha-2}|\ln x_n|^{-1-\varepsilon_0})$ при $\alpha \neq 1$, $\sigma(x) = O(x_n^{-1}|\ln x_n|^{-2-\varepsilon_0})$ при $\alpha = 1$ $(\varepsilon_0 > 0)$. 2. При $0 \leqslant \alpha < 1$ функции из $\dot{\Omega}$ обращаются в среднем в нуль на Γ_0. 3. Если выполнено (1), (2) при $\alpha \geqslant 1$, то любая достаточно гладкая в D функция φ такая, что $\{G\varphi, G\varphi\} < +\infty$, $\varphi|_{\Gamma_1} = 0$, $|\varphi| \leqslant C_4^2 x_n^{(1-\alpha)/2}$ $(\alpha > 1)$, $|\varphi| \leqslant C_4^2|\ln x_n|^{1/2}$ $(\alpha = 1)$, принадлежит $\dot{\Omega}$. 4. Если выполнено (1) и (3) при каком-либо $\beta \geqslant \alpha$, то оператор вложения $\dot{\Omega}$ в $L_D^2(\sigma)$ вполне непрерывен.

Помимо этой теоремы вложения, в работе установлены другие теоремы этого типа, и на их основе изучены и первая и вторая краевые задачи. Близкие результаты получены С. Г. Михлиным (РЖМат, 1954, 2963; реф. 8823), который, однако, рассматривал в основном случай самосопряженного дифференциального оператора в L_D^2 (при $\sigma(x) \equiv 1$). М. Ш. Бирман

8825. Простая формула для решения плоской задачи Дирихле. Дюран (Une expression simple de la solution du problème de Dirichlet dans le plan. Durand Émile), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 21, 1452—1454 (франц.)

Автор доказывает следующую теорему: Пусть $\zeta = q(z)$ — аналитическая функция комплексного пере-

менного $z = x + iy$, переводящая действительную ось плоскости z в кривую C на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда решение $V(p)$ задачи Дирихле в области G, ограниченной кривой C, равно реальной части функции

$$V(P) = RF(z) = \frac{1}{\pi}\int_C V(M)\,\frac{g(z_0')\,e^{i\Psi}}{g(z) - g(z_0)}\,dl,$$

где Ψ — угол между внутренней нормалью к C и осью ox. А. А. Веденов

8826. Неравенство, содержащее интегралы от гармонической функции 3 переменных. Гейбриэл (An inequality concerning integrals of 3-dimensional harmonic functions. Gabriel R. M.), J. London Math.-Soc., 1956, **31**, № 1, 79—82 (англ.)

Пусть Γ — замкнутая выпуклая поверхность; C — выпуклая поверхность, лежащая внутри Γ; U — функция, гармоническая внутри Γ и на ней. Пусть $Q \in \Gamma$, $P \in C$ — произвольные точки. Тогда

$$\iint_C |U(P)|^\lambda\,dS \leqslant 2^\lambda\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^\lambda \iint_\Gamma |U(Q)|^\lambda\,d\sigma,$$
$$1 < \lambda \leqslant 2.$$

Случай $\lambda > 2$ рассмотрен автором ранее (Gabriel R. M., J. London Math. Soc., 1949, **24**, 313—316). А. А. Дезин

8827. Оценки производных функций Грина. Эйдус Д. М., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 2, 207—209

Дается доказательство неравенства

$$\left|\frac{\partial^m G(x, y)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}\right| < \frac{c^{(m)}}{r_{xy}^{m+1}}$$

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m)$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$, $c^{(m)} = \text{const}$, где $G(x, y)$ — функция Грина оператора Лапласа в конечной трехмерной области, ограниченной $(k+1)$ раз непрерывно дифференцируемой поверхностью Ляпунова S, обращающаяся в нуль на S. Х. Л. Смолицкий

8828. О поведении положительных супергармонических функций у границы по Мартену. Наим (Sur l'allure des fonctions surharmoniques positives à la frontière de Martin. Naïm Linda), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 25, 1907—1910 (франц.)

В работах Мартена (Martin R. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1941, **49**, 137—172) и Брело и Шоке (Brelot M., Choquet G., Ann. Inst. Fourier, 1951, **3**, 199—263) введено пространство Грина Ω с функцией Грина G и границей Δ. Здесь вводится ядро $\Theta(M, P)$, получающееся продолжением на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Delta$ функции $G(M, P)\,(G(M, P_0)\ G(P, P_0))^{-1}$ (точка $P_0 \in \Omega$ фиксирована), и изучаются его свойства и свойства порождаемых им потенциалов $U(M) = \int \Theta(M, P)\,d\mu(P)$ с мерой $\mu > 0$. Множество $E \subset \overline{\Omega}$ называется разреженным (effilé) в точке $Q \bar{\in} E$, если $Q \bar{\in} \overline{E}$ или если существует потенциал U, для которого $U(Q) < \lim_{E \in M \to Q} \inf U(M)$. Минимальные точки Δ, введенные в указанных выше работах, характеризуются тем, что в них Ω не разрежено; для разреженности $E \subset \Omega$ в минимальной точке $Q \in \Delta \cap \overline{E}$ необходимо и достаточно существование потенциала U, для которого $U(M)/\Theta(Q, M) \to \infty$ $(E \ni M \to Q)$. Дополнения к множествам, разреженным в данной точке, образуют окрестностную базу наиболее тонкой топологии, в которой потенциалы непрерывны. Если $\nu(M)$ — положительная супергармоническая функция с массой, не сосредоточенной в P_0, то в каждой минимальной точке $Q \in \Delta$ отношение $\nu(M)/G(M, P_0)$ имеет в указанной топологии предел > 0 или $= +\infty$, равный $\lim_{\Omega \ni M \to Q} \inf [\nu(M)/G(M, P_0)]$. В работе содержатся лишь схемы доказательств. А. Д. Мышкис

8829. О почти субгармонических функциях. Тасиро (On almost subharmonic functions. Tashiro Shizuko), 九州大學理學部紀要, Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1955, **A9**, № 1, 55—59 (англ.)

Шварц (Schwartz L., Théorie des distributions. Paris, 1951) называет дистрибуцию T субгармонической, если $\Delta * T \geqslant 0$. Им же доказано, что класс субгармонических дистрибуций совпадает с классом локально суммируемых функций, удовлетворяющих неравенству $f \leqslant \mu_\rho * f$, где μ_ρ — однородное распределение единичной массы на сфере радиуса ρ. Такие функции названы почти субгармоническими. Пусть f — локально суммируема в n-мерном евклидовом пространстве. Пользуясь методом, аналогичным методу Шварца, автор доказывает, что f — почти субгармоническая тогда и только тогда, когда 1) $(\nu_\rho - \delta) * f \geqslant 0$ для всех $\rho > 0$ или 2) $(\mu_\rho - \nu_\rho) * f \geqslant 0$ для всех $\rho > 0$. Здесь ν_ρ — однородное распределение единичной массы в шаре радиуса ρ, δ — дельта Дирака. Б. Боярский

8830. Разностный аналог уравнения Пуассона. Дейвис (Poisson's partial difference equation. Davies H.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 23, 232—240 (англ.)

Исследуются решения $V_{l,m}$ и $V_{l,m,n}$ разностных уравнений

$$4V_{l,m} - V_{l-1,m} - V_{l+1,m} - V_{l,m-1} - V_{l,m+1} = \delta_{l0}\delta_{m0}, \quad (1)$$

$$6V_{l,m,n} - V_{l-1,m,n} - V_{l+1,m,n} - V_{l,m-1,n} - V_{l,m+1,n} - V_{l,m,n-1} - V_{l,m,n+1} = \delta_{l0}\delta_{m0}\delta_{n0}, \quad (2)$$

где l, m и n пробегают независимо всевозможные целочисленные значения и δ_{rs} — символ Кронекера. Используя преобразование Фурье функций, определенных на сетках, автор находит решения уравнений (1) и (2), имеющие следующий вид:

$$V_{l,m} = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2lx \cos 2ny}{\sin^2 x + \sin^2 y}\,dx\,dy,$$

$$V_{l,m,n} = \frac{2}{\pi^3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2lx \cos 2my \cos 2nz}{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}\,dx\,dy\,dz.$$

Для решений $V_{l,m}$ и $V_{l,m,n}$ при больших значениях аргументов справедливы асимптотические формулы

$$V_{l,m} = -(4\pi)^{-1}\{\ln(x^2 + m^2) + O(1)\},$$

$$V_{l,m,n} = (4\pi)^{-1}\ \{(l^2 + m^2 + n^2)^{-1/2} + O[(l^2 + m^2 + n^2)^{-1}].$$

Вопрос о единственности решений уравнений (1) и (2) в статье не ставится. Результаты автора, касающиеся уравнения (1), содержатся в работах Штёра (Stöhr, Math. Nachr., 1950, **3**, H. 4, 5, 6) и Соболева (Докл. АН СССР, 1952, **87**, № 2, 179; № 3, 341), где выяснены также те ограничения на рост $V_{l,m}$, $l^2 + m^2 \to \infty$, которые обеспечивают единственность решения (1) с точностью до аддитивной постоянной. В. С. Рябенький

8831. Некоторые классы положительных решений уравнения $\Delta u = Pu$ на римановых поверхностях. I, II. Одзава (Some classes of positive solutions of $\Delta u = Pu$ on Riemann surfaces. I. II. Ozawa Mitsuru), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 4, 121—126; 1955, **7**, № 1, 15—20 (англ.)

Пусть F — риманова поверхность в смысле Вейля —

Радо; $P(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая на ней функция, положительная кроме, быть может, множества, не имеющего в F предельных точек. Предполагается, что функция Грина для уравнения

$$\Delta u = Pu, \qquad (1)$$

существование которой показано Мирбергом (РЖМат, 1956, 2164), удовлетворяет условию $\int\int_F G(z, \zeta) P(z) \times d\sigma_z \equiv 2\pi$ (часть результатов получена без этого предположения); кроме того, если F имеет бесконечный жанр, то требуется, чтобы существовал только один идеальный граничный элемент. Пусть компактные в F области $F_n (n = 0, 1, \ldots)$ с аналитической границей Γ_n исчерпывают F в обычном смысле; $\omega'(z) = \lim \omega_n'(z)$, где ω_n' удовлетворяет уравнению (1) в $F_n - \overline{F}_0$; $\omega_n|_{\Gamma_0} = 1$, $\omega_n|_{\Gamma_n} = 0$. Тогда в случае

$$\underline{\lim}_{z \to \Gamma} \omega'(z) > 0 \qquad (2)$$

(Γ — идеальная граница F) устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие, сохраняющее свойство минимальности, между положительными решениями в $F - \overline{F}_0$ уравнения (1), равными нулю на Γ_0, и аналогичным классом гармонических функций. Из исследования этого соответствия выводится ряд следствий. Некоторые аналогичные утверждения выводятся и для того случая, когда условие (2) заменено на $\overline{\lim}_{z \to \Gamma} \omega'(z) > 0$, однако тогда положение более сложное. Далее в любой области $D \subset F$ с аналитической относительной границей C исследуются решения уравнения (1), равные нулю на C; в частности, сравниваются размерности пространства таких решений (и некоторых их подпространств) с аналогичными размерностями для случая $D = F - \overline{F}_0$. В заключение приводится новый вывод существования в F функции Грина для уравнения (1). А. Д. Мышкис

8832. Метод для решения бигармонического уравнения. Синг (A technique for the solution of the biharmonic equation. Synge J. L.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali 1954, Roma, 1955, 39—53 (англ.)

Выбирается соответствующее функциональное пространство с положительной метрикой и путем ослабления условий задачи определяются два взаимно ортогональные линейные подпространства L' и L''. Решение задачи находится в обоих подпространствах. Точкам и векторам в подпространстве соответствуют симметричные матрицы порядка 2×2. с нулевым следом. Путем выбора конечного числа точек в L' и L'' решение определяется на гиперкруге и строится в смысле метода наименьших квадратов. Метод предназначен только для граничных условий определенного типа. К. Е. Чернин

8833. Об одном неопределенном уравнении в гильбертовом пространстве и его применении в теории потенциала. Крейн С. Г., Успехи матем. наук, 1954, 9, вып. 3, 149—153

Установлен критерий разрешимости неопределенного уравнения

$$(E + K)x + My = h$$

при любой правой части h из гильбертова пространства в случае, когда K — вполне непрерывный оператор, а M — ограниченный оператор. Пользуясь этим результатом, автор упрощает доказательство Г. Вейля (Weyl H., Math Z., 1952, 55, № 2) теоремы существования решения внешней задачи Дирихле для метагармонических функций.

Следует отметить, что доказательство Г. Вейля упомянутой теоремы по существу совпадает с доказательством, данным Векуа еще в 1942 г. (Векуа И. Н., Сообщ. АН ГрузССР, 1942, 3, № 4; Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1943, 12) . А. В. Бицадзе

8834. О теории потенциала. Маджонес (Sulla teoria del potenziale. Magenes Enrico), Rend. Seminar. mat., Univ. Padova, 1955, 24, № 2, 510—522 (итал.)

Граница F конечной области D пространства (x, y, z) имеет в каждой точке определенную касательную плоскость и непрерывную кривизну. В каждой точке $M \in F$ задана ось l_M, направленная внутрь D и не лежащая в касательной плоскости к F в точке M. Предполагается, что направляющие косинусы оси l_M суть гельдеровы функции точки M. Пусть

$$u(P) = \int_F \varphi(Q) \frac{1}{PQ} d\sigma_Q.$$

Если функция $\varphi(Q)$ гельдерова, то, как известно,

$$\lim_{P \to M} \frac{\partial u(P)}{\partial l_M} = \pm 2\pi\varphi(M) \cos(n_M l_M) + \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dl_M} \frac{1}{PQ} d\sigma_Q.$$

Доказывается, что эта формула верна во всех лебеговых точках функции $\varphi(Q)$, если она суммируема. Соответствующий результат устанавливается для предельных значений потенциала косого двойного слоя

$$w(P) = \int_F \varphi(Q) \frac{d}{dl_Q} \frac{1}{PQ} d\sigma_Q.$$

С. Г. Михлин

8835. Линейные аспекты теории потенциала. I. Изучение конечных моделей. Шоке, Дени (Aspects linéaires de la théorie du potentiel. I. Etude des modèles finis. Choquet Gustave, Deny Jacques), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 2, 222—225 (франц.)

Пусть пространство E состоит из n точек $1, \ldots, n$. Ядро G — функция $G(i, j)$ $(i, j \in E)$ (не обязательно симметричная). Мера μ (распределение зарядов) — набор чисел $m_1, \ldots, m_n$; $S_\mu = \{i \mid m_i \neq 0\}$. Потенциал $G_\mu(i) = \Sigma_{j=1}^n G(i, j) m_j$. Ядро G удовлетворяет принципу доминирования, если для любых мер $\lambda \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$ из $G_\mu \geqslant G_\lambda$ (на S_λ) следует $G_\mu \geqslant G_\lambda$ (на E); принципу выметания, если для любых меры $\mu \geqslant 0$ и подмножества $K \subset E$ существует мера $\mu' \geqslant 0$, для которой $S_{\mu'} \subset K$, $G_{\mu'}(i) = G_\mu(i)$ $(i \in K)$, $G_{\mu'}(i) G_\mu \leqslant (i)$ $(i \in E)$; принципу нижней грани, если для любых мер $\lambda \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$ существует мера $\nu \geqslant 0$, для которой $G_\nu(i) = \min \{G_\lambda(i), G_\mu(i)\}$. Выясняется связь между этими принципами. Так, если $G(i, i) \neq 0$ $(i \in E)$, то принципы доминирования и выметания равносильны и из выполнения их следует принцип нижней грани. Если $\det G \neq 0$ и выполняется принцип нижней грани, то существует и притом единственная перестановка τ пространства E, для которой ядро $G(i, \tau j)$ удовлетворяет принципам доминирования и выметания. Принцип выметания для ядра равносилен принципу доминирования для транспонированного ядра. Если $\det G \neq 0$, то для выполнения принципа выметания необходимо и достаточно существование матриц S и A, $S(i, i) = 0$, $S(i, j) \geqslant 0$, $A(i, i) > 0$, $A(i, j) = 0$ $(i \neq j)$, для которых $G(I - S) = A$. В этом случае для $ASA^{-1} u \leqslant u$ (супер-

гармоничности u) необходима и достаточна возможность представления $u = G_\mu$, $\mu \geqslant 0$. Если G удовлетворяет принципу доминирования и $t > 0$, то $\det(G+tI) \neq 0$ и $G+tI$ удовлетворяет тому же принципу. В заключение упоминается о симметричных ядрах, где можно применить понятие энергии. Доказательства отсутствуют.

А. Д. Мышкис

8836. **О локальном поведении решений дифференциальных уравнений в частных производных непараболического типа. III. Аппроксимация при помощи сферических функций.** Хартман, Винтнер (On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. III. Approximations by spherical harmonics. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 3, 453—474 (англ.)

Продолжение предыдущих работ авторов (РЖМат, 1954, 729; 1955, 4431). Полученные там результаты обобщаются на случай n-независимых переменных ($n > 2$). В статье доказательство проводится для случая трех независимых переменных. Метод доказательства отличается от использованного в предыдущих работах и является обобщением метода, применяемого Мюллером (РЖМат, 1955, 5036).

Рассматривается уравнение

$$\Delta u + \alpha \nabla u + \gamma u = 0, \qquad (1)$$

где $\gamma = \gamma(x)$ — функция, $(\alpha = \alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$ — вектор-функция точки x трехмерного пространства, заданные в некоторой окрестности нуля. Радиус-вектор точки x записывается в виде $x = r \cdot e$, $|x| = r$, где e — единичный вектор.

Функция $u = u(x)$ называется C^1-решением уравнения (1) в шаре $|x| \leqslant 1$, если она класса C^1 в $|x| \leqslant 1$ и может быть представлена в виде суммы гармонической функции и ньютоновского потенциала с плотностью $(\alpha \nabla u + \gamma u)/4\pi$. Пусть $S_N(e)$ — общая сферическая функция порядка N.

Главный результат первой части работы состоит в следующем: Пусть $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$ непрерывны в некотором шаре с центром в $x = 0$, например в шаре $|x| \leqslant 1$. Пусть $u(x)$ C^1-решение уравнения (1) такое, что $u(0) = 0$. Тогда или $u(x) \equiv 0$ в $|x| \leqslant 1$, или существует положительное целое число $N > 0$ и сферическая функция $S_N(e)$, $S_N(e) \neq 0$ на единичной сфере $|x| = 1$ такие, что равномерно относительно e при $r = |x| \to 0$ имеют место соотношения

$$u(x) = r^N S_N(e) + o(r^N),$$

$$\Delta u = \Delta(r^N S_N(e)) + o(r^{N-1}).$$

При тех же предположениях выведены два следствия: 1) если $u(x) = o(r^n)$ для всех n, то $u(x) \equiv 0$ для нулей $\nabla u = 0$ точка $x = 0$ не может служить точкой накопления (если $u(x) \neq 0$). Эти два результата обобщают известные теоремы Карлемана (T. Carlemann, C. r. Acad. sci., 1933, **197**, 471—474) на пространственный случай.

Для доказательства рассматриваются разложения Фурье исследуемого решения в ряд по сферическим функциям. Для коэффициентов этих разложений, которые являются функциями r, из уравнения (1) получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Оно интегрируется в конечном виде. Полученные выражения используются для установления точных оценок для рассматриваемых разложений, откуда и следуют приведенные утверждения.

Во второй части работы рассматривается характер изолированных особенностей C'-решений уравнения (1). Устанавливается вид решения в окрестности изолированной особой точки ($x = 0$) при $u(x) = O(r^{-N-2})$ $\Delta u = o(r^{-N-3})$, а также при $u(x) \to \infty$ для $|x| \to 0$. Доказано, что в случае $u(x) = o(r^{-1})$ при $|x| = r \to 0$ изолированная особенность в $x = 0$ устранима. Метод аналогичен применяемому в первой части работы или в работах, цитированных в начале реферата.

Б. Боярский

8837. **Замечания к обобщенной задаче Дирихле для линейных эллиптических и параболических уравнений 2-го порядка.** Пини (Osservazioni sopra un problema generalizzato di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine ellittiche e paraboliche. Pini Bruno), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci., fis., mat. e natur., 1955, **19**, № 5, 237—246 (итал.)

Пусть D — связная плоская область, ограниченная кривой C с непрерывной кривизной. Пусть C_t — некоторая специальная последовательность контуров, сходящаяся к C при $t \to 0$. Рассматривается задача об отыскании функции u такой, что (при заданной $f \in L^p(s)$)

$$\Delta u = 0 \text{ для } P \in D - C;$$

$$\lim_{t \to +0} \int_{C_t} |u(x, y) - f(s)|^p ds_t = 0.$$

Для $p > 1$ существование единственного решения указанной задачи известно. С помощью рассмотрения последовательности функций $u_\tau(P)$

$$\Delta u_\tau = 0 \text{ для } P \in D_\tau - C_\tau;\ u_\tau = |u|^p \text{ для } P \in C_\tau;\ 0 < \tau < t$$

(тогда $|u|^p \leqslant u_\tau$ для $P \in D_\tau$) доказывается соответствующее утверждение для $p = 1$. Результат остается справедливым и для более общего уравнения 2-го порядка по двум переменным и распространяется (в соответствующей постановке) на случай параболического уравнения. Доказательства аналогичны.

А. А. Дезин

8838. **Формула интегральных оценок решений неоднородного уравнения теплопроводности.** Гальярдо (Formule di maggiorazione integrale per le soluzioni dell'equazione del calore non omogenea. Gagliardo Emilio), Ricerche mat., 1954, **3**, № 1, 40—75 (итал.)

Статья посвящена изучению оценок решений линейного неоднородного уравнения параболического типа

$$L(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_1(x, y)\frac{\partial v}{\partial y} + a_2(x, y)\frac{\partial v}{\partial x} + a_3(x, y)v = f(x, y);\quad a_1(x, y) < 0 \qquad (1)$$

в области $\overline{T}$ $\{0 \leqslant x \leqslant X;\ 0 \leqslant y \leqslant Y\}$.

Вначале изучаются решения простейшего уравнения теплопроводности ($a_1 = -1$; $a_2 = a_3 = 0$), затем решения уравнения (1) в классах функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Определение: функция $z(x, y)$ принадлежит классу $H^{(2\lambda, \lambda)}$ ($\lambda < 1/2$) в $\overline{T}$, если для любых точек (x', y'), $(x'', y'') \in \overline{T}$ отношение $|z(x'', y'') - z('x, y')| / [|x' - x''|^{2\lambda} + |y' - y''|^{\lambda}]$ ограничено; пусть $|z|^T_\lambda = \sup |z(x'', y'') - z(x', y')| / [|x' - x''|^{2\lambda} + |y' - y''|^{\lambda}]$. Устанавливается ряд теорем о мажорировании. Приведем одну из них:

Теорема. Существует постоянная C, зависящая от T и λ ($2\lambda < 1$), ограниченная вместе с $1/|a_1|$, такая, что для любого решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям $v(0, y) = v(X, y) = v(x, 0) = 0$, справед-

лива оценка

$$|v_{xx}|_\lambda^T + |v_y|_\lambda^T \leqslant C\,[\max_{(x,\,y)\in\overline{T}} |f| + |f|_\lambda^T].$$

С помощью этой теоремы устанавливается

Теорема. Если $a_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ и $f(x, y)$ определены в области $\overline{T}$ и принадлежат в ней классу $H^{(2\lambda,\,\lambda)}$, $w_1(y)$, $w_2(y)$, непрерывны на сегменте $[0, Y]$, $w_0(x)$ непрерывна на $[0, X]$, то существует в области T решение краевой задачи $L(w) = f$; $w(0, y) = w_1(y)$, $w(X, y) = w_2(y)$; $w(x, 0) = w_0(x)$. Статья содержит еще целый ряд предложений, аналогичных сформулированным выше. С. Д. Эйдельман

8839. **Распространение на уравнение теплопроводности одной теоремы А. Гарнака. Адамар** (Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack. Hadamard J.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 3, 337—346 (франц.)

На решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

распространяется известная в теории гармонических функций вторая теорема Гарнака: если ряд, состоящий из положительных решений $U_n(x, y)$ уравнения (1), заданных в области D: $\varphi_1(y) < x < \varphi_2(y)$; $0 < y \leqslant Y$; $\varphi_1(Y) < \varphi_2(Y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — монотонные функции, сходится в точке (X, Y), то он сходится равномерно вместе со всеми своими производными внутри любой замкнутой области, содержащейся в D. Доказательство основано на изучении явного представления решения первой краевой задачи в случае прямоугольного контура. Отметим, что сходная теорема была установлена примерно в то же время и, как видно, независимо Пини (РЖМат, 1956, 444). С. Д. Эйдельман

8840. **Абстрактная задача Коши и задача Коши для параболических дифференциальных уравнений. Хилле** (The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations. Hille Einar), J. Analyse Math., 1954, **3**, 81—196 (англ.)

Дается подробное изложение задачи Коши для параболических уравнений (на вещественной оси) с точки зрения полугрупп. Содержание: гл. I. Абстрактная задача Коши; гл. II. Основные факты из теории дифференциальных уравнений; гл. III. Задача Коши для уравнений диффузии; гл. VI. Операторы C, имеющие чисто дискретный точечный спектр; гл. V. Ограниченные (restricted) операторы, имеющие чисто дискретный точечный спектр; гл. VI. Посторонние решения. Приложение.

В гл. I дается абстрактная формулировка задачи Коши, а также критерий единственности решений. Гл. II. Исследование резольвент операторов

$$C(u) \equiv b(x)\,u''(x) + a(x)\,u'(x)$$

и

$$L(u) \equiv (\{b(x)\,u(x)\}' - a(x)\,u(x))'$$

с непрерывными коэффициентами $a(x)$ и $b(x) > 0$) соответственно в $C[\alpha, \beta]$, и $L(\alpha, \beta)$ где $-\infty \leqslant \alpha < 0 < \beta \leqslant \infty$. Гл. III. Теорема 7.5 утверждает, что C порождает полугруппу в $C[\alpha, \beta]$, непрерывную при $t = 0$, тогда и только тогда, если $\Omega(\alpha) = \Omega(\beta) = \infty$. Здесь

$$\Omega(x) = \int_0^x (W_1(x) - W_1(s)\,(b(s)\,W(s))^{-1} ds,$$

$$W_1(x) = \int_0^x W(s)\,ds, \quad W(x) = \exp\left(-\int_0^x a(s)\,b(s)^{-1} ds\right).$$

Соответствующее условие для $L(u)$ имеет вид

$$\Omega(\alpha) = \Omega(\beta) = W_2(\alpha) = W_2(\beta) = \infty,$$

где $W_2(x) = \int_0^x W_1(s)\,(b(s)\,W(s))^{-1} ds$. Эти результаты были сформулированы в заметке автора (C. r. Acad. sci., 1950, **230**, 34—35) без подробного доказательства. В гл. IV изучаются спектральные свойства операторов C и L, а также разложение в «тета-ряд» плотности переноса, связанной с уравнениями диффузии $\partial/\partial t = C$ и $\partial/\partial t = L$. В гл. V исследуется эта же проблема, если C (и L) не является бесконечно малым производящим оператором полугруппы, непрерывной в сильном смысле во всем пространстве $C[\alpha, \beta]$ (и $L(\alpha, \beta)$). Гл. VI посвящена неединственности и «взрыву (explosion) при конечном $t > 0$» решений уравнений диффузии. Результаты, указанные в реферате, иллюстрируются в приложении на двух конкретных уравнениях: 1) уравнение Эрмита: $a(x) = -2x$, $b(x) = 1$, $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$; 2) уравнение Халма (Halm): $a(x) = 0$, $b(x) = (x^2 + 1)^2$ $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$. K. Yosida

Примечание редакции: Другие применения теории полугрупп к дифференциальным уравнениям см. в статьях автора (РЖМат, 1953, 811; 1954, 4009; 1955, 4416).

Перевод из Math. Revs., 1955, **16**, № 1, 45

8841. **Формулы оценок и теоремы существования для решений параболических уравнений с двумя переменными. Чилиберто** (Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili. Ciliberto Carlo), Ricerche mat., 1954, **3**, № 2, 202—219 (итал.)

Пусть D — область плоскости (x, y), определяемая неравенствами $a \leqslant y \leqslant b$, $\alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)$ $(\alpha(y) < \beta(y))$, где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — функции, имеющие непрерывные производные первого порядка в $[a, b]$. В области D рассматривается дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, y)$ уравнения $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial u/\partial y = f(x, y)$, удовлетворяющее следующим условиям: $u(x, a) = \varphi(x)$, $u(\alpha(y), y) = \psi(y)$, $u(\beta(y), y) = \eta(y)$, где $f(x, y)$ непрерывна в D, функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\eta(y)$ имеют непрерывные производные первого порядка. Доказывается неравенство

$$\iint_D [u^2 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u''_{xx})^2]\,dx\,dy \leqslant h\,\{\iint_D f^2\,dx\,dy + \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} [\varphi^2 + (\varphi')^2]\,dx + \int_a^b [\psi^2 + \eta^2 + (\psi')^2 + (\eta')^2]\,dy,$$

где h — постоянная, зависящая лишь от области D. Новых теорем существования в работе нет. Д. М. Эйдус

8842. **О нелинейных уравнениях параболического типа с двумя переменными. Чилиберто** (Sulle equazioni non lineari di tipo parabolico in due variabili. Ciliberto Carlo), Ricerche mat., 1954, **3**, № 2, 129—165 (итал.)

Пусть $F(x, y, z, u, t, w, \alpha)$ — функция, которая определена и непрерывна при всех значениях переменных и имеет непрерывные производные первого и второго порядка по переменным z, u, t, w, α. Предполагается, что производные первого порядка по этим переменным, рассматриваемые как функции от y, удовлетворяют условию Липшица с показателем λ равномерно относительно x, z, u, t, w, α. Эти же производные, рассматриваемые как функции от x, удовлетворяют условию Липшица с показателем 2λ равномерно относительно y, z, u, t, w, α. Кроме того, $F'_t F'_w < 0$. Рассматривается уравнение $F(x, y, v, v'_x, v'_y, v''_{xx}, \alpha) = 0$, где α — параметр, и ставится следующая краевая задача в области $0 \leqslant x \leqslant X$, $0 \leqslant y \leqslant Y$: $v(x, 0) = v_0(x)$, $v(0, y) = v_1(y)$, $v(X, y) = v_2(y)$. Доказывается, что при любом α эта задача имеет решение, и притом единственное, если выполняются условия:

1) Существует такое значение параметра α_0, для которого краевая задача имеет одно и только одно решение.

2) Всякое множество решений краевой задачи, для которого соответствующее множество значений параметра α ограничено, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным; то же имеет место для первых производных этих решений по y и для вторых производных по x.

3) Функция $v_0(x)$ имеет производную второго порядка, удовлетворяющую условию Липшица с показателем 2λ. Каждая из функций $v_1(y)$ и $v_2(y)$ имеет производную первого порядка, удовлетворяющую условию Липшица с показателем λ. Кроме того, $v_0(0) = v_1(0)$, $v_0(X) = v_2(0)$.

4) При любом α $F(0, 0, v_0(0), v_0'(0), v_1'(0), v_0''(0), \alpha) = 0$,

$$F(X, 0, v_0(X), v_0'(X), v_2'(0), v_0''(X), \alpha) = 0.$$

Аналогичная теорема доказана для квазилинейного уравнения

$$\partial^2 v/\partial x^2 + a(x, y, v, v_x', \alpha)\,\partial v/\partial y = f(x, y, v, v_x', \alpha),$$

где $a < 0$, при более слабых предположениях о функциях a и f. Д. М. Эйдус

8843. **Эллиптичность параболических уравнений.** Мидзохата (Mizohata Sigeru), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 22, 1547—1549 (франц.)

Для линейной неоднородной p-параболической в смысле И. Г. Петровского системы, коэффициенты и правая часть которой являются бесконечно дифференцируемыми функциями $x_1, \ldots, x_n, t$ в области Ω, формулируется теорема: Все распределения (обобщенные вектор-функции), удовлетворяющие системе, являются бесконечно дифференцируемыми вектор-функциями.

С. Д. Эйдельман

8844. **О фундаментальных решениях параболических систем.** Эйдельман С. Д., Матем. сб., 1956, **38**, № 1, 51—92

В § 1 дается аналитическая характеристика построенной И. Г. Петровским (Бюлл. МГУ, 1938, сер. А, **1**, № 7, 1—72) фундаментальной матрицы $G(t, t_0, x-\xi)$ для записанной в матричной форме системы

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - B\left(t, \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \qquad (A')$$

получающейся из общей параболической системы

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k_0 2b + \sum_1^n k_s \leqslant n_j 2b} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t) \times \times \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \ldots + k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \qquad (A)$$

с непрерывными в $[0, T]$ коэффициентами, сведением ее обычным образом к системе первого порядка по t. Автор показывает, что при $t > t_0$ $G(t, t_0, x-\xi)$ как функция переменных $[x_s - \xi_s]/(t-t_0)^{1/2b}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ является целой функцией порядка $q = 2b/[2b-1]$ при комплексных значениях аргументов; при вещественных значениях агрументов справедливы оценки:

$$|D_x^m G(t, t_0, x-\xi)| \leqslant \frac{C_1}{(t-t_0)^{[n+m+M-2b]/2b}} \times \times \exp\left\{-C_2 \sum_1^n \frac{|x_s - \xi_s|^q}{(t-t_0)^{1/[2b-1]}}\right\}, \qquad (3)$$

где M — максимальный порядок производных по x, входящих в (1), C_1 и C_2 — положительные постоянные, зависящие только от T.

В двух случаях (для систем с постоянными коэффициентами, содержащих только старшие определяющие параболичность члены, и для сильно параболических систем, содержащих только старшие производные) C и C_2 в (3) могут быть взяты не зависящими от T. Это обстоятельство дает возможность автору обобщить полученные им ранее результаты (РЖМат, 1954, 2166; 1956, 1361).

В § 2 рассматривается параболическая в слое $(0, T)$ система

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_1 + \ldots + k_n \leqslant 2b} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t, x) \times \times \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \qquad (B)$$

с зависящими также от x и достаточно гладкими коэффициентами. В матричной форме она также имеет вид (A'). Методом Э. Э. Леви для (B) и ей сопряженной системы строятся фундаментальные матрицы и устанавливаются для них оценки (3) (с $M = 2b$).

Оценка (3) позволяет распространить результаты О. А. Ладыженской (Матем. сб., 1950, **27**, № 3, 175—184) и автора (РЖМат, 1954, 2166) о корректной разрешимости задачи Коши в классе неограниченных функций на неоднородную систему

$$Lu = f(t, x) \qquad (C)$$

при неограниченных начальных данных и правой части $f(t, x)$.

В § 3 доказывается возможность аналитического продолжения фундаментальной матрицы для (B), в область комплексных значений какой-либо пространственной координаты при условии аналитичности коэффициентов (B) по этой координате. Это позволяет в § 4 распространить результаты И. Г. Петровского о аналитичности решений системы (A) на системы (B) с аналитическими коэффициентами. § 5 посвящен распространению результатов § 3 и 4 на системы, параболические в конечной области. Л. Н. Слободецкий

8845. **Некоторые краевые задачи для параболических систем в полупространстве.** Загорский Т. Я., Докл. АН СССР, **106**, № 1, 11—14

Для параболической системы

$$\partial u/\partial t = L(\partial/\partial x)\,u, \qquad (1)$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \sum_{k_1 + \ldots + k_n = s} a_{lj}^{(k_1, \ldots, k_n)} \frac{\partial^s}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|, \quad u = \left\| \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{matrix} \right\|$$

с постоянными коэффициентами $\ldots a_{lj}^{(k_1, \ldots, k_n)}$ решается следующая задача: найти при $-\infty < x_j < +\infty$ $(j = 1, 2, \ldots, \overline{n-1})$, $x_n > 0$, $t > 0$ регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{x_n \to +0} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(x', t), \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad (2)$$

где

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \sum_{k_1 + \ldots + k_n = s_l} b_{lj}^{(k_1, \ldots, k_n)} \frac{\partial^{s_l}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\|,$$

$$f(x', t) = \begin{Vmatrix} f_1(x', t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{sN/2}(x' t) \end{Vmatrix}$$

$(l = 1, 2 \ldots sN/2,\ j = 1, 2, \ldots, N)$, $s_l < s$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $b_{lj}^{(k_1, \ldots, k_n)} = \text{const}$. При этом предполагается, что

$$\det R \neq 0, \tag{3}$$

где

$$R = \int_{C^+} B(\alpha)\, L^{-1}(\alpha, p)\, (E, \alpha E, \ldots, \alpha^{s/2-1} E)\, d\alpha_n,$$

$L(\alpha, p) = L(\alpha) - pE$, $B(\alpha)$ и $L(\alpha)$ — матрицы, получающиеся из $B(\partial/\partial x)$ и $L(\partial/\partial x)$ в результате замещения символов $\frac{\partial}{\partial x_m}$ числами $i\alpha_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, E—единичная матрица порядка N, p — надлежащим образом выбранный комплексной параметр и C^+ — некоторый положительно ориентированный контур в комплексной плоскости α_n.

Решение краевой задачи (1), (2) дается формулой

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{[n-1]/2}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi', t, \tau)\, f(\xi', \tau)\, d\xi',$$

где $G(x, \xi', t, \tau)$ — соответствующая матрица Грина. Построение последней производится с помощью комбинации трансформаций Фурье и Лапласа. Для элементов матрицы Грина приводятся оценки

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} G_{kj}(x, \xi', t, \tau) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1 \exp\left\{ -C_2 \frac{|x - \xi'|^{s/[s-1]}}{(t-\tau)^{1/[s-1]}} \right\}}{(t-\tau)^{[l-s_j+n-1]/s} \left[1 + x_n/(t-\tau)^{1/s}\right]^{l-s_j+n-2}}.$$

Доказательства только намечены. В конце отмечается, что условие (3) разрешимости краевой задачи (1), (2) может быть ослаблено. Л. Н. Слободецкий

8846. Обобщение принципа Гюйгенса на ультрагиперболическое уравнение. Левн (Extension of Huyghens' principle to the ultrahyperbolic equation. Lewy Hans), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **39**, 63—64 (англ.)

Пусть

$$\square = \Sigma_1^3 \partial^2/\partial x_i^2 - \Sigma_1^3 \partial^2/\partial y_i^2,\ r^2 = \Sigma_1^3 x_i^2,\ s^2 = \Sigma_1^3 y_i^2$$

и

$$\square u = f(x, y). \tag{1}$$

Тогда

$$\int_0^a dt \iint d\omega_1 \iint d\omega_2\, f(x, y) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} a \left\{ \iint d\omega_1 u \Big|_{r=a,\ s=0} - \iint d\omega_2 u \Big|_{r=0,\ s=a} \right\}, \tag{2}$$

где $r = t$, $s = a - t$, т. е. t — скалярный параметр на пятимерной характеристической гиперповерхности $r + s = a$, а $d\omega_1$ и $d\omega_2$ — дифференциалы телесных углов соответственно на сферах $r = \text{const}$, $y_i = \text{const}$ и $s = \text{const}$, $x_i = \text{const}$. Формула (2) является обобщением формулы Асгейрсона и представляет аналог соответствующей формулы для уравнения колебаний, из которой вытекает принцип Гюйгенса. В. И. Левин

8847. О краевых задачах для уравнения смешанного типа. Кароль И. Л., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 1, 177—181

Рассматривается уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0 \tag{1}$$

($\alpha \leqslant 0$ — вещественная постоянная) в области Ω, ограниченной простой кривой Γ_+, лежащей целиком в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(x = 0)$ и $B(x = 1)$ оси $y = 0$, и гладкой кривой Γ_- с концами в точках A и B, лежащей целиком в треугольнике ABC, образованном отрезком AB оси ox и дугами AC и BC характеристик уравнения (1). Исследуются следующие краевые задачи:

Задача K_1. Найти функцию $u(x, y)$ 1) непрерывную в Ω $(u \in C\Omega)$, 2) дважды непрерывно дифференцируемую в Ω_+ и Ω_- $(u \in C^{(2)}(\Omega_+ + \Omega_-))$ и удовлетворяющую там уравнению (1), 3) имеющую непрерывные вплоть до кривой Γ_- производные u_x и u_y, если: на $\overline{\Gamma}_+ = \Gamma_+ + A + B$ заданы непрерывные значения

$$u|_{\overline{\Gamma}_+} = \varphi, \tag{2}$$

на $\overline{\Gamma}_- = \Gamma_- + A + B$ заданы непрерывные значения u и на Γ_- — значения ее производных:

$$u|_{\overline{\Gamma}_-} = \psi,\quad u_x|_{\Gamma_-} = \varkappa_1,\ u_y|_{\Gamma_-} = \varkappa_2. \tag{3}$$

Задача K_2. Найти функцию $u(x, y)$ такую, что: 1) $u \in C\Omega$, 2) $u \in C^{(1)}$ $(\Omega_+ + \Gamma_+ + \Omega_- + \Gamma_-)$, 3) $u \in C^{(2)}(\Omega_+ + \Omega_-)$ и удовлетворяет там уравнению (1), 4) на кривой Γ_- $u(x, y)$ удовлетворяет условиям (3), а в точках Γ_+ краевому условию

$$\partial u/\partial \gamma + \mu u = \varphi, \tag{4}$$

где направление γ составляет острый угол с внутренней нормалью к Γ_+, μ и φ — функции, заданные на $\overline{\Gamma}_+$.

Доказывается существование и единственность решения этих задач. В заключение приведены результаты исследования свойств решений задач K_1 и K_2 уравнения (1) в окрестности внутренних точек отрезка AB при $\alpha = 0$. М. М. Смирнов

8848. Теорема существования для обобщенной задачи Трикоми. Протер (An existence theorem for the generalized Tricomi problem. Protter M. H.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 1—7 (англ.)

Для уравнения смешанного типа

$$K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $K(y)$ — монотонная функция [$K(0) = 0$, $K'(0) > 0$] доказана теорема альтернирующего характера о разрешимости следующей задачи: В области D, ограниченной: а) гладкой дугой Γ, лежащей в полуплоскости $y \geqslant 0$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$; б) характеристикой уравнения (1) $\Gamma_2 : y = \gamma_1 x$, $dy/dx > 0$, выходящей из точки B; в) дугой $\gamma : y = g(x)$, $g(x) < 0$, $-M < q' < 0$, выходящей из точки A, которая в начале совпадает с произвольно малым куском γ^* характеристики $\Gamma_1 : y = \gamma_1(x)$, $\partial y/\partial x < 0$, а потом отходит от этой характеристики и простирается до пересечения с Γ_2, ищется так называемое квазирегулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям: $u/\Gamma = \varphi$, $u/\gamma = \psi$, где φ и ψ — заданные функции.

Для уравнения Трикоми $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ теорема существования регулярного решения упомянутой выше задачи при достаточно малом γ^* была доказана Франклем (Франкль Ф. И., Уч. зап. МГУ, Механика, 1951,

т. 3). В случае уравнения Лаврентьева $u_{xx}+\operatorname{sgn} y u_{yy}=0$, существование и единственность решения этой задачи без требования малости γ^* установлены референтом (Докл. АН СССР, 1950, **70**, № 4, 373—376; 1951, **78**, № 4, 621—624; РЖМат, 1954, 2965). А. В. Бицадзе

8849. О собственных частотах колеблющихся мембран. Пойа (Sur les fréquences propres des membranes vibrantes. Pólya Georges), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 6, 708—709 (франц.)

D — плоская конечная область, C — ее граница, λ_n и μ_n — собственные числа задач

$$\Delta u+\lambda u=0,\ u|_C=0;$$

$$\Delta u+\mu u=0,\ \partial u/\partial n|_C=0.$$

Область D называется бруском, если неналегающими конгруэнтными D (включая симметричные) областями можно покрыть всю плоскость. Для произвольного бруска доказывается неравенство $A\lambda_k\geqslant 4\pi k$, где A — площадь бруска. Для трапеции доказывается еще и неравенство $A\mu_k\leqslant 4\pi(k-1)$. С. Г. Михлин

8850. Достаточные условия разложимости в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям. Ильин В. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 245—248

Результаты в основном содержатся в предыдущих работах автора (РЖМат, 1956, 6596, 6597).

8851. О проблеме уточнения закона Вейля для асимптотического распределения собственных значений. Плейель (On the problem of improving Weyl's law for the asymptotic eigenvalue distribution. Pleijel Å.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali 1954. Roma, 1955, 69—75 (англ.)

Для задачи

$$\Delta u+\lambda u=0 \qquad (x\in D), \tag{1}$$

$$u|_S=0, \tag{2}$$

где D — односвязанная область трехмерного евклидова пространства с границей S, Вейль получил асимптотическую формулу

$$N(t)=\Sigma_{\lambda_n\leqslant t}1=\frac{V}{6\pi^2}t^{3/2}+o(t^{3/2}); \tag{3}$$

здесь λ_n — собственные значения задачи (1), (2) и V — объем области D. Курант показал, что в формуле (3) остаток можно заменить на $O(t\ln t)$.

В реферируемой статье, которая является изложением доклада, ставится проблема уточнения формулы (3) при помощи метода Карлемана. Эта проблема естественно разбивается на две части: 1) уточнение асимптотической формулы для следа функции Грина задачи (1), (2) при больших отрицательных λ и 2) уточнение тауберовых теорем. В первом направлении приводится следующий результат, полученный автором совместно с Ганелиусом:

Если граница S бесконечно дифференцируема, то для $\omega\to\infty$

$$\omega\Sigma_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu(\lambda_\nu+\omega)}=\frac{V}{4\pi}\omega^{1/2}-\frac{S}{16\pi}\ln\omega+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{m-1}a_\nu\omega^{-\nu/2}+O(\omega^{-m/2}). \tag{4}$$

В этой формуле m может быть сколь угодно большим, a_ν — константы, S — площадь S. В случае дифференцируемости границы до некоторого порядка число m в формуле (4) также ограничено. При помощи интегрирования в комплексной ω-плоскости из формулы (4) можно получить следующий результат: ряд Дирихле $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-z}$ как функция z может быть аналитически продолжен влево и имеет простые полюсы в точках $z=1$ и $z=3/2-\nu$, $\nu=0,1,2,\ldots$

В точках $z=0,-1,-2,\ldots$ эта функция имеет нули (если S не бесконечно дифференцируема, то возможность аналитического продолжения ограничивается степенью регулярности S).

Вторая часть проблемы обсуждается с различных точек зрения, однако никаких окончательных результатов в этом направлении не приводится. Доказательства отсутствуют.

Примечание референта. Частный случай формулы (4), соответствующий $m=1$, был получен С. И. Гринбергом (РЖМат, 1955, 3230). Б. М. Левитан

8852. Распространение асимптотического закона Вейля для собственных значений. Браунелл (An extension of Weyl's asymptotic law for eigenvalues. Brownell F. H.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 4, 483—499 (англ.)

Рассматривается задача

$$\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+\lambda u=0\ (x\in D), \tag{1}$$

$$u|_S=0. \tag{2}$$

Используя результаты Плейеля и Ганелиуса (см. реф. 8851 формулу (4)), автор показывает, что

$$N(t)=\Sigma_{\lambda_n\leqslant t}1=\frac{S}{4\pi}t-\frac{l}{4\pi}t^{1/2}+\widetilde{O}(\ln t). \tag{3}$$

Здесь λ_n — собственные значения задачи (1)—(2), S — площадь S, l — длина контура S, $\widetilde{O}$ означает следующее: если

$$F(t)=[N(t)-\frac{S}{4\pi}t-\frac{l}{4\pi}t^{1/2}],$$

то

$$\left|\int_{\lambda_1/2}^{\infty}\exp\left[-\frac{\rho^2}{2}(\ln u/t)^2\right]dF(t)\right|\leqslant$$
$$\leqslant[M\exp(\pi^2\rho^2/2+1/2\,\rho^2)]\ln u,$$

для всех $u\geqslant l$ и $\rho>0$, M — некоторая константа.

При доказательстве формулы (3) автор уточняет некоторые тауберовы теоремы. Доказываются также формулы

$$\Sigma_{\lambda_n\leqslant t}\psi_n^2(x)=\frac{1}{4\pi}t+\widetilde{O}(\ln t), \tag{4}$$

$$\Sigma_{\lambda_n\leqslant t}\psi_n(x)\psi_n(y)=\widetilde{O}(\ln t), \tag{5}$$

где $\psi_n(x)$ — ортонормированные собственные функции задачи (1)—(2).

Примечание референта. Более точные формулы, чем (4) и (5), получены референтом (РЖМат, 1956, 440). Б. М. Левитан

8853. Вариационные принципы в математической теории дифракции. Эрдейи (Variational principles in the mathematical theory of diffraction. Erdélyi Arthur), Atti. Acad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952—1953, **87**, № 1, 281—293 (англ.)

Ставится задача об отражении волны вида $u(x,y,z)e^{i\omega t}$ от плоского экрана S конечных размеров, распо-

ложенного в плоскости $x=0$. Отраженная волна имеет вид $v(x, y, z)e^{i\omega t}$; функция v удовлетворяет уравнению $\Delta v + k^2 v = 0$, принципу излучения и краевому условию $v|_S = -u|_S$.

В последующем P и P' означают произвольные точки пространства, Q и Q' — точки экрана S, $d\omega$ и $d\omega'$ — соответствующие этим точкам элементы площади S, $r(PP')$ — расстояние между P и P'.

Обозначая $K(PP') = r^{-1}(PP')\exp[-ikr(PP')]$ и $f(Q) = (2\pi)^{-1}\partial v(Q^+)/\partial x = (2\pi)^{-1}\partial v(+0, y, z)/\partial x$, автор получает для $f(Q)$ интегральное уравнение первого рода $\int_S K(QQ')f(Q')\,d\omega' = u(Q)$; если оно решено, то $v(P)$ восстанавливается по известной формуле $v(P) = -\int_S K(PQ)f(Q)\,d\omega$.

Если размеры экрана малы по сравнению с длиной волны λ, то с достаточной степенью точности

$$\int_S r^{-1}(QQ')f(Q')\,d\omega' = u(O), \qquad (1)$$

$$v(P) = -A(P)e^{-ikr}r^{-1};\ A(P) = \int_S R^{-1}rf(Q)\,d\omega; \qquad (2)$$

здесь $r = r(OP)$, $R = r(PQ)$; O — произвольно фиксированная точка экрана. Формулы (1) и (2) показывают, что отраженная волна имеет характер сферической волны с переменной амплитудой $A(P)$; в точках пространства, достаточно удаленных от препятствия, амплитуда делается постоянной

$$A = \int_S f(Q)\,d\omega.$$

Формула (1) дает интерпретацию $f(Q)$ как поверхностной плотности заряда, распределенного на S; полный заряд равен A. Как указывает автор, приведенные выше приближенные формулы по существу совпадают с теми, которые в свое время были даны Рэлеем.

Утверждается, что решение уравнения (1) можно получить как функцию, которая при данной величине заряда сообщает максимум отношению

$$I[f] = \frac{\int_S\int_S f(Q)f(Q')\,d\omega\,d\omega'}{\int_S\int_S r^{-1}(QQ')f(Q)f(Q')d\omega d\omega'},$$

при этом $I_{\text{stat}} = A/u(0)$.

Ставится более общая вариационная задача об отыскании функций $f(x)$ и $g(x)$, сообщающих стационарное значение отношению

$$\frac{\iint f(x)g(y)p(y)q(x)\,dx\,dy}{\iint f(x)g(y)k(x, y)\,dx\,dy}; \qquad (3)$$

здесь x и y — точки некоторой области евклидова пространства, $p(y)$, $q(x)$, $k(x, y)$ — данные функции. Искомые функции можно подчинить дополнительным условиям

$$\int f(x)q(x)\,dx = \int g(x)p(x)\,dx = \iint f(x)g(y)k(x, y)\,dx\,dy. \qquad (4)$$

Доказывается, что стационарное значение отношения (3) равно общему значению интегралов (4), а реализующие это значение функции $f(x)$ и $g(y)$ определяются уравнениями

$$\int f(y)k(y, x)\,dy = p(x), \quad \int k(x, y)g(y)\,dy = q(x).$$

Доказывается, что к задаче о стационарном значении функционала вида (3) можно свести определение амплитуды $A(p)$ (формула (2)), а также определение функции v в общем случае, без предположения о малости размеров экрана. С. Г. Михлин

8854. О задачах с косой производной. Лион (Sur les problèmes de dérivée oblique. Lions Jacques-Louis), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 3, 266—268 (франц.)

Пусть Ω — область n-мерного евклидова пространства R^n, ограниченная бесконечно дифференцируемой гиперповерхностью Γ, F — некоторая функция, бесконечно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$, и $B = \Sigma b_p D^p$ — линейный дифференциальный оператор с коэффициентами, бесконечно дифференцируемыми в R^n. Через $B^\Gamma F$ обозначается функция $B\tilde{F}$, рассматриваемая только на Γ. Изучается отображение $F \to B^\Gamma F$. Утверждается, что при соответствующих определениях скалярных произведений и некоторых ограничениях на порядок оператора B это отображение может быть расширено непрерывным образом до отображения гильбертова пространства всех функций, с производными порядка $\leqslant m$, суммируемыми с квадратом в Ω, в некоторое гильбертово пространство функций, определенных на Γ. Отдельно изучается случай, когда B есть нормальная производная к Γ порядка не выше $m-1$. Приведены другие свойства изучаемых отображений. В этой части автор использует теоремы вложения Соболева и Кондрашова.

Дается применение полученных результатов к некоторой граничной задаче для дифференциального линейного эллиптического оператора порядка $2m$ типа задачи с косой производной (n независимых переменных). Постановка задачи довольно сложна. В исследуемом случае, предполагая область ограниченной, автор получает альтернативы Фредгольма. Доказательств нет. Б. Боярский

8855. Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной трехмерной области. Киселев А. А., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 1, 27—30

Развивая свои предыдущие работы, автор доказывает теорему существования и единственности обобщенного решения в смысле Соболева в классе L_2 полных уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной трехмерной области с кусочно-гладкой границей при заданном начальном условии и однородном условии на границе, в некотором конечном интервале изменения времени t.

Приводится краткая схема доказательства, основанного на применении метода Галеркина, когда искомая скорость $\mathbf{v}$ и заданная массовая сила удовлетворяют некоторым достаточным условиям. Если действие массовой силы отсутствует, то $\mathbf{v} \to 0$ при $t \to \infty$. Автор замечает, что теорема существования доказывается и в том случае, когда на искомую скорость не налагается вышеупомянутое условие. Д. Е. Долидзе

8856 Д. Об одном типе граничных задач для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Лаврук Б. Р. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Львовск. ун-т, Львов, 1956

8857 Д. Задача Коши для квазилинейных параболических уравнений и систем. Смирнов Г. П. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1956

8858 Д. **О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости.** Карапетян К. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

8859. **К задаче о продольном изгибе стержня переменной жесткости.** Бахтин И. А., Красносельский М. А., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 4, 621—624

Задача состоит в исследовании уравнения

$$y''(s) = -P\rho(s)\,y(s)\sqrt{1-[y'(s)]^2},\ y(0) = y(1) = 0. \quad (1)$$

Здесь y — прогиб, s — длина дуги, $\rho(s) > 0$ — жесткость стержня, P — нагрузка. Уравнение (1) сводится к интегральному уравнению

$$\varphi(s) = P\rho(s)\int_0^1 G(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt \times$$

$$\times\left(1-\left[\int_0^1 G_s'(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где $\varphi(s) = -y''(s)$, $G(s,\ t) = s(1-t)$ при $s \leqslant t$, $G(s,\ t) = G(t,\ s)$. Уравнение (2) исследуется в пространстве $C[0,\ 1]$ качественными методами нелинейного функционального анализа (РЖМат, 1956, 564). Нагрузка P_0 называется критической, если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует при некотором $P \in (P_0 - \delta,\ P_0 + \delta)$ решение (1) такое, что $|y(s)| < \varepsilon$. Получены следующие результаты. Критические нагрузки совпадают с собственными значениями P_k краевой задачи

$$y''(s) = -P\rho(s)\,y(s),\quad y(0) = y(1) = 0.$$

При $P = P_k$ (2) не имеет ненулевых малых решений. Каждому P_k соответствует такой интервал $\Delta_k = (P_k,\ P_k + h_k^2)$, что при $P \in \Delta_k$ (1) имеет ненулевые решения, стремящиеся вместе со своими вторыми производными к нулю при $P \to P_k$. Существует такое h, что при $P \in (P_1,\ P_1 + h^2)$ уравнение (1) имеет единственное положительное решение $y(s,\ P)$, которое вместе с $y_s'(s,\ P)$ непрерывно зависит от P и стремится к нулю при $P \to P_1$. При этом для $P^* < P^{**}$ $y(s,\ P^*) < y(s,\ P^{**})$, $y''(s,\ P^*) > y''(s,\ P^{**})$, $s \in (0,\ 1)$. Отмечается, что уравнение

$$y''(x) = -P\rho(x)\,y(x)\,(1+[y'(x)]^2)^{3/2}, \quad (3)$$

которым иногда приближенно заменяют (1), имеет малые ненулевые решения при $P < P_k$. На этом основании утверждается, что (3) не может правильно описывать явление. Подробные доказательства отсутствуют.

М. Ш. Бирман

8860. **Дифференциальные уравнения движения, содержащие параметр медленности.** Волосов В. М., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 1, 7—10

Рассматривается уравнение нелинейных колебаний при медленном изменений массы и действующих сил

$$d[m(\mu t)\,\dot{x}]/dt + \mu f(\mu t,\ x,\ \dot{x}) + Q(\mu t,\ x) = 0 \quad (1)$$

(μ — малый параметр). Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, исследуется на большом интервале времени $t = 1/\mu$. При выполнении основного требования $\operatorname{sign} Q = \operatorname{sign} x$ и некоторых других ограничений решение (1) колеблется с медленно меняющимися амплитудой и периодом. Максимумы и минимумы решения опираются на амплитудные кривые, описывающиеся с ошибкой порядка μ функциями $F_1(\mu t) > 0$ и $F_2(\mu t) < 0$, удовлетворяющими уравнениям

$$\int_{F_1}^{F_2} Q(\mu t,\ x)\,dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt}I(\mu t,\ F_1,\ F_2) = \mu A(\mu t,\ F_1,\ F_2) \quad (2)$$

где I и A элементарно выражаются через f и Q, причем $A = 0$ при $f = 0$. I отличается на величину порядка μ от интеграла действия $\oint m\dot{x}\,dx$, так что (2) представляет собой закон изменения интеграла действия, который не является инвариантом при $f \neq 0$. Указывается на возможность построения следующего приближения для амплитудных кривых, учитывающего член порядка μ, зная которое можно выразить с ошибкой порядка μ^2 период колебаний, т. е. время между двумя соседними максимумами или минимумами.

А. Б. Васильева

8861. **О существовании периодических решений в ограниченной задаче о трех телах.** Агостинелли (Sull' esistenza di soluzioni periodiche nel problema ristretto dei tre corpi. Agostinelli Cataldo), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, 88, № 1, 265—291 (итал.)

Материальная точка m весьма малой массы движется под влиянием ньютоновского притяжения двух точек M_1 и M_2, описывающих друг относительно друга круговые траектории; точка m движется в плоскости траекторий точек M_1 и M_2. Если устранить воздействие точки M_2 на точку m, то среди всех траекторий точки m будет существовать бесконечное число круговых траекторий, зависящих от одного произвольного параметра; за этот параметр может быть взят период T обращения точки m по круговой траектории. Автор работ ищет периодические движения точки m, близкие к указанным равномерным круговым движениям и переходящие в эти последние при устранении притяжения точки M_2. Применение известных методов Пуанкаре для отыскания периодических решений системы дифференциальных уравнений, основанное на разложении искомых величин в ряды по степеням малого параметра μ, приводит к заключению о существовании двойной бесконечности периодических решений в рассматриваемой ограниченной задаче о трех телах. В качестве параметра μ берется число, равное произведению отношения масс точек M_2 и M_1 на отношение кубов радиусов круговых орбит точек m и M_2; в качестве же двух параметров, определяющих периодические решения, могут быть приняты период T и одна из компонент начального возмущения скорости точки m; вместо этого последнего параметра может быть взято также и малое приращение периода T, возникающее благодаря учету воздействия точки M_2 на точку m. Ввиду наличия интеграла живых сил будут существовать в рассматриваемой задаче и периодические решения того же самого периода T, какой принадлежит движению точки m вокруг точки M_1, когда притяжение точки M_2 устранено. В конце статьи приводятся формулы для подсчета изменения первоначального периода T движения в зависимости от начального небольшого изменения скорости точки m в направлении линии M_1M_2.

Л. Н. Сретенский

8862. **Об интегрировании уравнений движения неголономных систем класса $T(2, 1)$.** Аржаных И. С., Докл. АН УзССР, 1956, № 3, 3—6 (рез. узб.)

Через $T(n, m)$ обозначается частный случай неголономной механической системы С. А. Чаплыгина, у ко-

торой число независимых координат равно n, но из них только m координат входят явно в выражения коэффициентов живой силы, уравнений связей и потенциала активных сил.

Далее, для системы T (2,1) предлагается метод интеграции уравнений движения С. А. Чаплыгина путем введения одной новой дополнительной координаты и одного дополнительного дифференциального соотношения между координатами. Коэффициенты этого соотношения могут быть иногда подобраны путем довольно сложных преобразований даже в этом простом случае таким образом, что уравнения С. А. Чаплыгина переходят в обыкновенные уравнения Лагранжа 2-го рода, допускающие один первый интеграл.

Затем приводится (без вычислений) соответствующий пример, представляющий плоское неголономное движение С. А. Чаплыгина. В. В. Добронравов

8863. **Решение дифференциальных уравнений равновесия пологой оболочки с заданным прямоугольным планом методом простых тригонометрических рядов. Назаров** (Розв'язання диференціальних рівнянь рівноваги пологої оболонки з заданим прямокутним планом методом простих тригонометричних рядів. Назаров О. Ю.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 1, 13—19 (укр.; рез. русс.)

Предполагается, что два противоположных края оболочки $x_2 = 0$, $x_2 = b$ свободно оперты. Уравнение в частных производных пологой оболочки приводится методом М. Леви к обыкновенному дифференциальному уравнению. В числовом примере на краях $x_1 = \pm a/2$ ставятся условия $w = d$; $w = v^1 = s = 0$ (w — прогиб, v^1 — перемещение в направлении оси x_1, S — сдвигающее усилие); коэффициенты решения табулированы для случаев $b/a = 0{,}5$ и 0,25, причем отношение высоты подъема к толщине оболочки принимает значения 1, 5, 10, 20, 30; внешняя нагрузка симметрична относительно оси $x_1 = 0$ и представляется первыми двумя членами разложения в ряд Фурье. Даются таблицы для прогиба в центре пластинки. Из полученных результатов наглядно видно отличие оболочки от плиты. Н. А. Алумяэ

8864. **Удар о сжимаемую жидкость. Егоров И. Т.**, Прикл. матем. и механика, 1956, 20, № 1,67—72

Рассматривается удар плоской пластины бесконечного размаха о свободную поверхность невесомой сжимаемой жидкости, заполняющей все нижнее полупространство. Задача решается путем разложения потенциала скоростей возмущенного движения жидкости по нечетным функциям Матье нечетного индекса. В заключение, пренебрегая квадратами величин абсолютной скорости жидкости, автор рассчитывает силу, действующую на пластинку, и определяет количество движения жидкости и кинетическую энергию пластинки для любого момента времени в процессе удара. Библ. 5 назв.

Э. Л. Блох

8865. **О плоском движении сжимаемой жидкости. Кшивицкий** (Sur le mouvement plan d'un liquide visqueux compressible. Krzywicki A.), Studia math., 1955, 15, № 1, 113—122 (франц.)

Доказательство результатов предыдущей работы автора (Bull. Acad. polon. sci., 1955, Cl. 3, № 4, 185—187), являющихся обобщением результатов Волибнера (Wolibner W., Studia math., 1951, 12, 279—285) на случай вязкой жидкости. Жесткая плоская замкнутая кривая S движется без воздействия внешних сил с постоянной скоростью U параллельно некоторой прямой. Вся плоскость S заполнена сжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ, давлением p и коэффициентами вязкости μ и ν. Компоненты скорости жидкости u и v удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса и следующим условиям: 1) $u = U$, $v = 0$ на S; 2) кинетическая энергия движения конечна; 3 существует последовательность бесконечно возрастающих чисел $\alpha_n > 0$ таких, что в системе подвижных полярных координат r, φ, жестко связанной с S,,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\alpha_n}^{8\alpha_n} \rho r\, dr \leqslant M\alpha_n^2, \quad \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\alpha_n}^{8\alpha_n} \rho^{-1} r\, dr \leqslant M\alpha_n^2,$$

где $M = \text{const}$. Тогда для компонент P_x, P_y давления жидкости на S получаются выражения вида

$$P_x = -\lim_{n\to\infty}\left[\iint_{H_{rn}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\, d\sigma + r_n^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial t} \sin\varphi\, d\varphi\right],$$

где r_n — последовательность бесконечно возрастающих чисел, u_φ — трансверсальная компонента скорости жидкости (относительно неподвижной системы координат), Hr_n — область, заключенная между S и окружностью радиуса r_n с центром в начале подвижной системы координат. Из этих формул вытекает, что при равномерном движении (по отношению к подвижной системе) жидкость не оказывает давления на S.

Если уравнение состояния жидкости есть $\rho = \text{const}\,\rho^\lambda$, $0 \leqslant \lambda < 1$, и если вместо условия 3) считать, что давление p, радиальная компонента скорости u_r и дивергенция скорости ограничены, то можно доказать, что существует последовательность бесконечно возрастающих чисел $r_n'' > 0$ таких, что

$$UP_x = -\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial E_{r_n''}}{\partial t} + Dr_n'' + k\iint_{Hr_n''} \frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - U(k-1)\, r_n''^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial t} \sin\varphi\, d\varphi\right\},$$

где

$$D_r = \iint_{H_r}\left\{\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\} d\sigma,$$

$$E_r = \frac{1}{2}\iint_{H_r} \rho\,(u^2 + v^2)\, d\rho, \quad k = (1-\lambda)^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что при сделанных выше предположениях не существует движения вязкой жидкости, равномерного относительно движущейся системы координат. S. Drobot

8866. **Об установившемся вращении сферы в вязкой жидкости. Коллинс** (On the steady rotation of a sphere in a viscous fluid. Collins W. D.), Mathematika, 1955, 2, № 1, 42—47 (англ.)

Рассматривается медленное установившееся движение несжимаемой вязкой жидкости, вызванное вращением вокруг оси oz твердого тела вращения. При этом предполагается, что в цилиндрических координатах (r, φ, z) скорость жидкости $V(r, z)$ направлена по оси φ и зависит лишь от r и z. Функция $\chi = rV(r, z)$ удовлетворяет тогда уравнению Стокса и ее можно интерпретировать как функцию тока безвихревого движения идеальной жидкости. На поверхности тела $\chi = \Omega r^2$, где Ω — угловая скорость вращения. Если то же тело движется в идеальной жидкости вдоль оси oz со скоростью $Q = -2\Omega$, то функция тока соответствующего движения удовлетворяет тем же граничным условиям. Тем самым устанавливается аналогия между этими видами движения, которая используется для изучения движения вязкой жидкости, вызванного вращением

сферы радиуса a вокруг диаметра oz. Предполагается, что компоненты скорости u, v, w в цилиндрических координатах не зависят от φ и разлагаются в ряды:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n R^{n-1};\ v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n R^{n-1},$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n R^{n-1},$$

где $R = \Omega a^2 \nu^{-1}$ — число Рейнольдса. Давление p и функция тока ψ имеют вид

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n R^{n-2},\ \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n R^{n-1}.$$

При помощи уравнений движения по индукции доказывается, что $v_{2n} = 0$, $\psi_{2n-1} = \text{const}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Откуда следует, что для вычисления первого приближения ($u_1 = w_1 = 0$; v_1) можно использовать указанную аналогию с движением идеальной жидкости. Следующие приближения определяются последовательно. Эффективно вычислены u_2, w_2, $v_2 = 0$, p_2, ψ_2, v_3 и v_5, что дает возможность вычислить g_1, g_3, g_5— коэффициенты разложения гидродинамической пары $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n+1} R^{2n}$.

C. Jacob

8867. Об установившемся движении жидкости в трубе, близкой к круговому цилиндру. Хажалия Г. Я., Матем. сб., 1956, **38**, № 1, 93—106

Жидкость идеальна и несжимаема. Течение установившееся и осесимметричное. Ось x является осью симметрии. Меридиональное сечение трубы определяется уравнением $y = \pm y(x)$, причем при конечной средней скорости потока величины $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ и $y'''(x)$ предполагаются малыми равномерно относительно x. При определении скорости потока V в произвольной граничной точке сохраняются лишь члены второго порядка малости относительно $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, и предполагается, что

$$V = \frac{H}{\pi y^2}\left(1 + Ay^2 + Byy'' + Cy''^2 + Dy'^2\right) + R_1,$$

где H — расход жидкости в трубе и R_1 — пренебрежимо малый остаточный член. Постоянные A, B, C, D определяются с помощью решения частных задач о движениях, порождаемых источником или источником и стоком, которые помещаются на оси x. Окончательная формула для V при пренебрежении R_1 имеет вид

$$V = \frac{H}{\pi y^2}\left[1 + \frac{1}{4}yy'' - \frac{1}{4}y'^2\right].$$

В качестве примера рассмотрено установившееся течение в упругой трубе, давление P которой на жидкость приближенно считается равным $P = M(y - y_0)$, где y_0 — начальный радиус трубы и M — постоянная. Найдено решение задачи, когда уравнение поверхности трубы имеет вид

$$y = y_1 + C_1 \cos\sqrt{a}\,x + C_2 \sin\sqrt{a}\,x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, $a = 4[M\pi^2 y_1^5 - 2\rho H^2]/\rho H^2 y_1^2$, ρ — плотность жидкости, y_1 — постоянная, определяемая из некоторого алгебраического уравнения пятой степени, причем $y_1 > y_0$. Получены оценки остаточного члена R_1.

М. И. Гуревич

8868. Некоторые нелинейные проблемы математической физики. Граффи (Alcuni problemi non lineari della fisica matematica. Graffi Dario), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1954—1955, **14**, 75—86 (итал.)

Рассматриваются нелинейные уравнения магнитостатики, движения баротропной идеальной жидкости, теплопроводности. Устанавливается разрешимость уравнения для вектора намагничивания. Доказывается теорема единственности решения уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости. Указано, что когда нелинейность в уравнении теплопроводности вызвана зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры, интеграл от коэффициента теплопроводности удовлетворяет уравнению Лапласа.

П. П. Бирюлин

8869. Об интегрировании уравнений распространения электромагнитных волн в изотропных и анизотропных однородных средах. Тоноло (Sull'integrazione delle equazioni di propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi omogenei isotropi e cristallini. Tonolo Angelo), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **39**, 39—61 (итал.)

Во введении автор приводит формулы, решающие задачу Коши для уравнений Клейна, Даламбера и следующих систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= a^2 \underset{2}{\Delta} X + (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= a^2 \underset{2}{\Delta} Y - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \underset{2}{\Delta} X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \\ \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \underset{2}{\Delta} Y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \underset{2}{\Delta} Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - b^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

В первой главе рассматривается однородная изотропная проводящая среда. Уравнения Максвелла сводятся к уравнению Клейна, задача Коши для которого решается приведенными во введении формулами.

Во второй главе рассматриваются непроводящие одноосные и двуосные кристаллические среды. Как для одноосных кристаллов, так и для двуосных уравнения Максвелла сводятся к системам уравнений, приведенным во введении, решение задачи Коши для которых известно.

П. П. Бирюлин

8870. Электромагнитная замедляющая линия как источник соотношений между бесселевыми функциями и эллиптическими интегралами. Праш (La ligne à retard électromagnétique, source de relations entre les fonctions de Bessel et les intégrales elliptiques. Prache Pierre M.), Ann. telécommuns, 1955, **10**, № 4, 82—86 (франц.)

См. РЖФиз, 1956, 823507.

8871. Асимптотическое решение уравнений Максвелла, содержащее дробные степени частоты. Клайн (Asymptotic solutions of Maxwell's equations involving fractional powers of the frequency. Kline Morris), Communs Pure and Appl. Math., 1955, **8**, № 4, 595—614 (англ.)

Автор строит асимптотическое решение уравнений Максвелла, содержащее дробные степени обратных ве-

личин круговой частоты ω гармонического колебания. Рассматривается гармоническое электромагнитное поле:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}(x, y, z)\, e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}(x, y, z)\, e^{-i\omega t},$$

возбуждаемое источником $\mathbf{F}(x, y, z, t) = \mathbf{g}(x, y, z) \times e^{-i\omega t}$, $\mathbf{g}(x, y, z)$ — амплитуда источника. Соответственно рассматривается импульсное поле $\mathbf{E}_0(x, y, z, t)$, $\mathbf{H}_0(x, y, z, t)$, порождаемое мгновенно возникающим распределением зарядов, $\overline{\mathbf{F}}(x, y, z, t) = \overline{\mathbf{g}}(x, y, z)\,\eta(t)$, где $\eta(t) = 0$ при $t < 0$, $\eta(t) = 1$ при $t > 0$.

Автор, как и в своих предыдущих статьях (Communs Pure and Appl. Math., 1951, 4, 225—262; РЖМат, 1955, 1760), следуя Лунебергу (Luneberg R. K., Asymptotic Development of Steady-State Electromagnetic Fields, Res. Rep. NEM-14, Inst. Math. Sci. New York Univ., July 1949), для асимптотического представления $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ по степеням ω^{-1} пользуется построением импульсного решения, как функции от t.

Предполагается, что в окрестности t_0, $\mathbf{E}_0(t)$ при фиксированных x, y, z имеет особенность вида

$$\mathbf{E}_0(t) = \begin{cases} \alpha(t_0 - t) \sum_{n=0}^{\infty} C_n (t_0 - t)^n / n! & \text{при } t < t_0, \\ \beta(t - t_0) \sum_{n=0}^{\infty} D_n (t - t_0)^n / n! & \text{при } t > t_0, \end{cases}$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — аналитические функции t при $t \neq 0$; при $t = 0$ они предполагаются непрерывными. Оба степенных ряда сходятся в некоторой окрестности t_0. Тогда функция $\mathbf{U}$, амплитуда установившихся колебаний электрического поля, дается выражением $\mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{U}_0 e^{ik\Psi_0}$,

$$\mathbf{U}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{D_n}{n!} \frac{1}{(-i\omega)^n} \int_0^{\infty} \beta\left(\frac{t}{-i\omega}\right) t^n e^{-t} dt - \right.$$

$$\left. - \frac{C_n}{n!} \frac{1}{(i\omega)^n} \int_0^{\infty} \alpha\left(\frac{t}{i\omega}\right) t^n e^{-t} dt \right\}, \qquad (1)$$

$k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ и $\psi_0(x, y, z) = ct$ — уравнение фронта волны, порожденной источником соответствующей приближению геометрической оптики. Каждой особенности $\mathbf{E}_0(t)$ — t_α соответствует ряд $\mathbf{U}_\alpha$ вида (1) и полное асимптотическое выражение дается в виде

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \sum\nolimits_\alpha \mathbf{U}_\alpha\, e^{ik\Psi_\alpha}. \qquad (2)$$

Аналогичными соотношениями связаны $\mathbf{H}_0(t)$ и $v(x, y, z)$.

В особом случае, когда $\alpha(t) = t^k$, $\beta(t) = t^l$, где k, $l \geqslant 0$, доказывается, что $\mathbf{U}_\alpha$ содержит дробные степени ω^{-1}, именно ω^{-n-k} и ω^{-n-l}, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказывается также, что ряд (2) для $\mathbf{U}$ имеет асимптотический характер в смысле Пуанкарэ. Наконец, автор отмечает, что его метод дает возможность дать асимптотические оценки определенным двойным интегралам. Предложенный метод применим к задачам, в которых справедливо приближение геометрической оптики, но оказывается непригодным для решения большинства диффракционных проблем. Д. З. Авазашвили

8872. **Динамическое расширение полого цилиндра в условиях идеальной пластичности. А г а б а б я н** Е. Х., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 3, 243—252

Задача о распространении и отражении упруго-пластических волн в бесконечно длинном цилиндре со свободной наружной поверхностью при внезапном приложении к внутренней поверхности постоянного и равномерно распределенного давления при условиях: а) материал не обладает упрочнением, б) модуль всестороннего сжатия при упругих и пластических деформациях одинаков. Уравнение движения имеет вид неоднородного квазилинейного волнового уравнения. Показано, что пластические деформации в указанных условиях распространяются в виде криволинейных волн Римана с общей касательной в точке ветвления. Построение решения ведется методом характеристик.

Приведены таблицы с результатами расчета для распространения и первого отражения при конкретных значениях давления, модулей материала и размеров цилиндра. На этом примере показано истощение ударной волны разгрузки, возникающей при отражении от свободной поверхности, возможность которого для продольных волн в стержнях при ударе указана ранее (Ленский В. С., Вестн. Моск. ун-та, 1951, № 5; Надеева Р. И., там же, 1953, № 5). В. С. Ленский

8873. **Распространение плоского скачка уплотнения в покоящейся среде. II. М а р т и н** (The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. II. M a r t i n M. H.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 2, 284—288 (англ.) См. РЖМат, 1956, 3453.

8874. **О динамической неустойчивости плит. Б а л ь д а ч ч и** (Sulla instabilitá dinamica della lastra. B a l d a c c i R i c c a r d o F.), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, 88, № 1, 21—37 (итал.)

Плита нагружена данными усилиями N_x, N_{xy}, N_y, действующими в плоскости плиты и периодически зависящими от времени. Уравнения колебаний плиты, а также естественное краевое условие на свободно опертом крае автор выводит из принципа Гамильтона. Подробно рассмотрен случай свободно опертой по краю прямоугольной плиты, которая подвержена действию напряжений $N_x(t)$, $N_y(t)$, зависящих только от времени. Уравнение для нормального смещения тогда имеет вид

$$B\Delta\Delta w + N_x(t)\, w_{xx} + N_y(t)\, w_{yy} + \mu w_{tt} = 0,$$

B и μ — некоторые постоянные. Ищутся решения этого уравнения, имеющие вид $w = \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, \varphi(t)$; для $\varphi(t)$ получается дифференциальное уравнение второго порядка, которое в частном случае

$$N_x(t) = X_0 + X\cos 2\omega t, \quad N_y(t) = Y_0 + Y\cos 2\omega t$$

приводится к уравнению Матье.

При наличии внутреннего затухания для $\varphi(t)$ получается уравнение

$$\varphi_{\tau\tau} + 2\beta\varphi_\tau + (\lambda - 2\gamma\cos 2\tau)\,\varphi(\tau) = 0;$$
$$\tau = \omega t, \quad \beta = \text{const},$$

которое приводится к уравнению Матье подстановкой $\varphi(\tau) = \psi(\tau)\, e^{-\beta\tau}$. С. Г. Михлин

8875. **Теорема существования и единственности для уравнений изотермического упругого равновесия при конечных деформациях. С т о п п е л л и** (Un teorema di esistenza ed unicità relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite S t o p p e l l i F r a n c e s c o), Ricerche mat., 1954, 3, № 2, 247—267 (итал.)

C_* — область, занятая упругим телом при отсутствии внешних сил, P_* — произвольная точка в C_*, Σ_* — граница C_*, Q_* — точка на Σ_*; C — область, занятая телом, подверженным действию внешних сил, P — произвольная точка в C; ε_j, $1 \leqslant j \leqslant 6$ — составляющие деформации, $W(\varepsilon)$ — упругий потенциал, k_* — плотность тела в ненагруженном состоянии, $\theta k_* F(P_*)\, dC_*$ и $\theta f^*(Q_*)\, d\Sigma_*$ — составляющие элементарных — объемной

и поверхностной — сил, θ — численный параметр. Наконец, N^* — единичный вектор нормали к Σ^*.

Задача состоит в интегрировании системы $\left(\alpha = \frac{dP}{dP_*}\right)$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad}_{p_*} \alpha\beta_* = \theta k_* F(P_*), \\ &\beta_* = -\left\| \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \right\|, \end{aligned}\right\} \text{ в } C_* \qquad (1)$$

$$\alpha\beta_* N^* = \theta f^*(Q_*) \text{ на } \Sigma_*.$$

Автор заменяет ее такой:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad}_{P_*} \alpha\beta_* = \theta k_* \gamma F \\ &\beta_* = -\left\| \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \right\| \end{aligned}\right\} \text{ в } C_* \qquad (2)$$

$$\alpha\beta_* N^* = \theta\gamma f^* \quad \text{на } \Sigma_*,$$

в которой γ — постоянная ортогональная матрица. Эта матрица определяется из некоторой системы, относительно которой доказывается ее разрешимость и единственность решения, если параметр θ достаточно мал. Подставив полученное значение γ в (2), автор получает систему, также разрешимую единственным образом при достаточно малом θ. Теперь, если вектор смещений s' удовлетворяет системе (2), то система (1) имеет решение s'' такое, что $1 + \frac{ds''}{dP_*} = \gamma^{-1}\left(1 + \frac{ds'}{dP^*}\right)$.

С. Г. Михлин

8876. **Функция Грина упругой пластины. Дин, Гаррис** (The Green's function of an elastic plate. Dean W. R., Harris G. Z.), Mathematika, 1954, **1**, № 1, 18—23 (англ.)

Авторами получена элементарным путем и притом в конечном виде функция влияния (функция Грина) для поперечных смещений упругой пластины, имеющей форму бесконечной плоскости, из которой удалена внутренняя часть параболы $y^2 = 4\alpha^2(x + \alpha^2)$. Пластина предполагается защемленной вдоль этой параболы. Изучается и предельный случай $\alpha = 0$.

П. Д. Калафати

8877. **Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. Абрамян Б. Л.**, Докл. АН АрмССР, 1955, **21**, № 5, 193—198 (рез. арм.)

Рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника при симметричном относительно оси симметрии загружении кромок прямоугольника нормальными и тангенциальными напряжениями. Бигармоническая функция напряжений $\varphi(x, y)$ ищется в виде:

$$\varphi(x, y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x \{A_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k y +$$

$$+ \alpha_a y [C_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k y]\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \cos \beta_k y \{A_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k x + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k x +$$

$$+ \beta_k x [C_k^{(2)} \operatorname{ch} \beta_k x + D_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k x]\},$$

где $\alpha_k = (2k-1)\pi / 2l$, $\beta_k = (2k-1)\pi / 2h$, $2l$ — длина, а $2h$ — высота прямоугольника, $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}, D_k^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ — постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

Решение поставленной задачи сводится к решению бесконечной (вполне регулярной) системы линейных уравнений, свободные члены которой порядка не ниже, чем $1/m$, что позволяет дать ее эффективное решение.

Г. Н. Савин

8878. **Метод Гринберга для решения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Гладик** (Grinbergova metoda řešeni parciálnich diferenciálnich rovnic druhého řádu. Hladik Arnošt), Českosl. časop. fys., 1955, 5, № 4, 423—434 (чеш.)

Рассматривается данное Гринбергом обобщение метода Коши — Ламе решения задачи Дирихле (Изв. АН СССР, сер. физ., 1946, **10**, 141—168). В отличие от Гринберга автор идет дедуктивным путем и делает ряд критических замечаний о практическом использовании этого метода; показана также целесообразность его применения для ряда задач линейной теории упругости. В качестве примера этим методом решена задача кручения бруса, поперечное сечение которого имеет вид части кругового кольца. M. Brdička

8879. **Кручение ромбической призмы. Карпов А. П.**, Сб. науч. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1955, № 5, 62—72

Гармоническая функция ψ, удовлетворяющая на контуре ромба условию $\psi - (x^2 + y^2)/2 = \text{const}$, ищется приближенно по методу Галеркина с использованием точного решения для квадрата. Приведены результаты расчетов во втором приближении.

Примечание референта. Применяемая автором система функций, повидимому, не является полной. М. Ш. Бирман

8880. **К определению функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. Салехов Г. С.**, Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 6, 1174—1176

Доказывается следующее утверждение: функция

$$P = P_0 + cW / u,$$

где P_0 и c — некоторые постоянные, является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^2 \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

удовлетворяющим граничному условию $P|_\Gamma = P_0$, причем P в двумерной области σ, кроме логарифмических особенностей, других особенностей не имеет. Функции w и u гармонические в σ. w имеет конечное число логарифмических особенностей, а u регулярна и нигде не обращается в нуль. Указано, что утверждение справедливо для пространства любого числа измерений. Выводится формула для определения давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений, когда $\sqrt{k(x,y)}$ (k — проницаемость) является функцией гармонической, а эксплуатация ведется при помощи n произвольно расположенных скважин. Приводится обобщение формулы Дюпюи для однородных пластов на случай пластов с переменной проницаемостью k.

В. Д. Чугунов

8881. **Попытка построить конечную систему, соответствующую частному случаю предингеровской нерелятивистской модели гармонического осциллятора. Ернефельт** (An attempt to work out a finite system corresponding to a special case of Schrödinger's non-relativistic model of the linear harmonic oscillator. Järnefelt G.), Compt. rend. 12 congr. mathematiciens scand. Lund., 1953 (1954), 115—134 (англ.)

На примере уравнения Шредингера для гармонического осциллятора рассматривается ограниченная модель: время, координата, импульс и энергия предполагаются меняющимися в ограниченном интервале, пробегая внутри последнего все значения. Отличие от обычных формул заключается в замене бесконечных пределов интегрирования конечными. При ограничении возможных значений времени, координаты и других

величин снизу и сверху осуществляется переход к «квантовой геометрии», которая при стремлении параметра решетки к нулю должна переходить в обычную. Интегрирование заменяется суммированием по точкам решетки. Новых физических выводов не содержится.

А. В. Тулуб

8882 К. Переходный режим в электрических цепях. **Пуэнсело** (Les régimes transitoires dans les réseaux électriques. Poincelot Paul, Paris, Gauthier-Villars, 1953, 132 pp.) (франц.)

Рассмотрение переходных процессов в электрических цепях посредством последовательного применения метода контурного интегрирования. В первой главе кратко излагаются математические методы, применяемые для изучения переходных процессов в электрических цепях. В последующих главах рассматриваются переходные процессы: 1) в фильтрах без потерь (нижних частот, верхних частот, полосных) и в фильтрах с потерями в элементах; 2) усилителях, радиоприемных устройствах и линиях задержки; 3) в длинной однородной линии бесконечной длины, в пупинизированной линии и подводном кабеле. Дается числовой расчет переходного режима в воздушной линии длиною 500 и 1000 *км*.

Примечание референта. Приводимые в гл. 9 решения для переходных процессов в длинных линиях были получены ранее в работах В. Н. Кузнецова (РЖМат, 1954, 4047), П. И. Кузнецова (Прикл. матем. и механика, 1947, 11; 1948, 12) и Э. Я. Риекстыньша (РЖМат, 1953, 309).

В. А. Судаков

См. также: 8732, 8764, 8765, 8889, 8945, 8946, 9053, 9080, 9083, 9102, 9103, 9109, 9111, 9112

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8883. Доказательство существования собственного значения у симметрического ядра. Мысовских И. П., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 2, 199—200

Работа содержит, в отличие от известных (см., например, Виарда Г., Интегральные уравнения, М.—Л., Гос. тех.-теор. изд-во, 1933, гл. 2, § 6), простое доказательство существования собственного значения ядра $K(s, t)$, вещественного, симметричного, непрерывного или слабо полярного и отличного от тождественного нуля в квадрате $a \leqslant s, t \leqslant b$.

Автор вводит произвольную функцию $\varphi(s)$, удовлетворяющую лишь условию $\int_a^b \varphi^2(s)\,ds = 1$. Затем доказывает справедливость неравенства

$$1 - \mu_0 \int_a^b \int_a^b K_2(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt > 0, \qquad (1)$$

где число $\mu_0 > 0$ таково, что в круге $|\mu| \leqslant \mu_0$ нет собственных чисел второго повторного ядра $K_2(s, t)$.

Пользуясь неравенством (1), автор методом от противного доказывает существование собственного числа у ядра $K_2(s, t)$, и вместе с ним у ядра $K(s, t)$.

Из (1) вытекает также справедливость неравенства

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|},$$

где λ_1 — первое собственное число ядра $K(s, t)$.

Н. П. Сергеев

8884. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Фридман В. М., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 233—244

Доказывается теорема: Если симметричное положительно определенное ядро $K(x, y) \in L^2(I \times I)$, где I — интеграл (a, b), и уравнение

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x), \quad f(x) \in L^2(I), \qquad (1)$$

имеет решение, то итерационный процесс

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \lambda[f(x) - f_{n-1}(x)],$$

где $\varphi_0(x) \in L^2(I)$, $f_{n-1}(x) = \int_a^b K(x, y)\,\varphi_{n-1}(y)\,dy$, $0 < \lambda < 2\lambda_1$ (λ_1 — наименьшее характеристическое число ядра $K(x, y)$), сходится к решению уравнения (1).

М. М. Вайнберг

8885. Некоторые вопросы линейных интегральных уравнений с ядрами, зависящими от параметра. Маркова В. А., Уч. зап. Пензенск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 2, 39—46

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y, \lambda)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (1)$$

с ядром вида

$$K(x, y, \lambda) = \sum_{n=0}^{m} \lambda^n K_n(x, y), \qquad (2)$$

где $K_n(x, y)$ — функции, симметрические, попарно ортогональные, имеют разрывы, допускаемые в теории линейных интегральных уравнений, λ — комплексный параметр. Предполагается интегрируемость $K(x, y, \lambda)$ (по обеим переменным) и $f(x)$.

При обычных условиях решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x, \lambda) = f(x) + \int_a^b R(x, y, \lambda)\,f(y)\,dy.$$

После введения понятия нормального неособенного ядра (когда единица не является собственным значением ядра $K_0(x, y)$ приводится теорема:

Если ядро уравнения (1) неособенное, то уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\psi(x) = \int_a^b \sum_{n=1}^{m} \lambda^n H_n(x, y)\,\psi(y)\,dy + f(x) \qquad (3)$$

в том смысле, что

$$\psi(x) = \varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy \qquad (4)$$

и

$$H_i(x, y) = \int_a^b K_i(x, t)\,R(t, y)\,dt + K_i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

где $R(x, y)$ — резольвента ядра.

Есть теоремы о симметризации ядра уравнения (4) и о наличии собственного значения у ядра (2) при условии, что $K_n(x, y)$ есть симметричные и определенные ядра.

Приведены формулы разложения резольвенты и решения уравнения (4) по фундаментальным функциям

и теорема о полюсах резольвенты. Рассмотрены случаи сведения неортогональных ядер к ортогональным, что равносильно сведению к уравнению с двумя параметрами. Для последних уравнений доказываются теоремы, аналогичные теоремам З. И. Халилова (Тр. Сект. мат. АН АзербССР, 1946, 2). М. К. Номоконов

8886. Нелинейные интегральные уравнения. Камерон, Шапиро (Nonlinear integral equations. Cameron R. H., Shapiro J. M.), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 472—497 (англ.)

Пусть C — пространство всех непрерывных вещественных функций $x(t)$ на $I: 0 \leqslant t \leqslant 1$ таких, что $x(0) = 0$. Рассматривается преобразование

$$y(t) = Tx \equiv xt + \int_0^t F(t, s, x(s))\, ds, \qquad (1)$$

где $F(t, s, u)$ непрерывна по совокупности (t, s, u) для $(t, s) \in \Delta: 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ и для $u \in I_\infty: -\infty < u < +\infty$. Оператор T преобразует C в подмножество $\Gamma \subset C$. Предполагается, что

$$|F(t, s, u_2) - F(t, s, u_1)| \leqslant M |u_2 - u_1| \qquad (2)$$

для $(t, s) \in \Delta$, $|u_1|, |u_2| \leqslant U$, где U — любое положительное число и $M = M(U)$. Отсюда следует, что (1) переводит C в Γ взаимно однозначно, а потому $x(t) = T^{-1}y$ для всех $y \in \Gamma$. При достаточно сильных предположениях, из которых, в частности, следует, что $\Gamma = C$, Камерон и Мартин (Cameron R. H., Martin W. T., Amer. J. Math., 1944, 66, 281—298; Ann. Math., 1950, 51, 629—642) двумя различными путями установили формулы для оператора T^{-1} в терминах интеграла Винера (о мере и интеграле Винера см., например, Гельфанд И. М., Яглом А. М., Успехи матем. наук, 1956, 9, вып. 1 (67), 77—114) и в сотрудничестве с Линдгреном (Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 138—143) они дали третий метод решений нелинейных функциональных уравнений, который также применим к решению уравнения (1). В данной работе дано усиление результатов, полученных указанными тремя способами, путем упрощения и ослабления различных предположений. Многие интересные случаи, которые раньше исключались, входят в настоящую статью и некоторые из этих результатов остаются в силе даже, когда $\Gamma \neq C$. В теореме 1 первой из цитированных работ Камерона и Мартина была установлена формула

$$T^{-1}(y(t)) = \lim \frac{\int_C^W z(t) \exp\{-p \int_0^1 [y(s) - T(z(s))]^2\}\, d_w z}{\int_C^\infty \exp\{-p \int_0^1 [y(s) - T(z(s))]^2 ds\}\, d_w z} \qquad (3)$$

для $y \in C$, если условие Липшица (2) имеет место на всей числовой оси, т. е. если M не зависит от U. В теореме 1 данной работы показано, что формула (3) сохраняется для всякого $y \in C$, если условие независимости M от U заменить менее ограниченным условием

$$|F(t, s, u)| \leqslant A[1 + |u| \ln(1 + |u|)], \quad (t, s, u) \in \Delta \otimes I_\infty. \qquad (4)$$

Теорема 2 данной работы представляет усиление теоремы 1 второй из цитированных работ Камерона и Мартина, так как в ней не требуется, чтобы F, F'_t, F'_u, F''_{tu} обращались в нуль при $t = s$ и $u \in I_\infty$, не требуется существование F''_{tu}, F''_{us}, причем вместо независимости M от U в (2) требуется лишь выполнение условия (4). Другие предположения работы представляют собою улучшение и обобщение различных теорем, установленных Камероном, Мартином и их сотрудниками. Библ. 10 назв. М. М. Вайнберг

8887. Исследование точек разветвления решения одного класса нелинейных интегральных уравнений. Ахмедов К. Т., Тр. ин-та физ. и матем. АН Азерб ССР, 1955, 7, 86—109 (рез. азерб.)

Аналитическим методом, опираясь на некоторые результаты Н. Н. Назарова и З. И. Халилова (Тр. сек. матем. АН АзербССР, 1946, 2; Тр. Ин-та матем. и механ. АН СССР, 1948, вып. 4; Тр. Среднеаз. ун-та, 1941, 5, сер. матем., вып. 33), автор устанавливает теоремы о единственности или ветвлении решений нелинейного интегрального уравнения вида

$$u(x) = \int_0^1 [K_0(x, s) + \lambda K_1(x, s)]\, f(s, u(s))\, ds, \qquad (1)$$

где $f(y, z)$ — аналитическая функция относительно z в окрестности значения $z_0 = u_0(x)$, $u_0(x)$ — решение уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$. К. Н. Юрчук

8888 К. Новые теоремы существования в теории нелинейных интегральных уравнений. Шефер (Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. Schaefer Helmut, Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1955, **101**, № 7, 40 S.) (нем.)

Книга состоит из введения и трех глав. Введение содержит некоторые понятия теории локально выпуклых линейных топологических пространств. В гл. I устанавливаются теоремы о функциональных уравнениях в вещественных линейных пространствах. При помощи теоремы А. Н. Тихонова о существовании неподвижной точки преобразователя (Math. Ann., 1935, 111, 767—776) доказывается теорема 1.1. Пусть S — локально выпуклое линейное топологическое хаусдорфово пространство и $\mathfrak{S}(x)$ — оператор, который непрерывно преобразует выпуклое и замкнутое множество $M \subset S$, содержащее некоторую окрестность нуля, в бикомпактное множество из S. Тогда либо существует неподвижная точка преобразования: $x_0 = \mathfrak{S}(x_0) \in M$, либо найдется по меньшей мере одна точка y_0, принадлежащая границе M' множества M такая, что $y_0 = \lambda \mathfrak{S}(y_0)$, где $0 < \lambda < 1$. Из данной теоремы вытекает, что если $\mathfrak{S}(M') \subset M$, то $\mathfrak{S}(x)$ имеет на M неподвижную точку. Теорема 1.2 представляет собой формулировку теоремы 1.1, когда S — банахово пространство. При помощи теоремы 1.2 легко устанавливается теорема 1.3. Пусть F — вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве, причем все существующие решения уравнения

$$x = \lambda F(x) \text{ (для каждого } \lambda \in (0, 1)) \qquad (1)$$

равномерно ограничены. Тогда уравнение (1) имеет по меньшей мере одно решение при всяком $\lambda \in [0, 1]$. В гл. II рассматривается уравнение Гаммерштейна $u = Ahu$, где $Au = \int_G K(x, y)\, u(y)\, dy$; $hu = f(u(y), y)$, $x, y \in G$. Ставится цель ослабить ограничения Гаммерштейна (Hammerstein A., Acta math., 1930, 54, 117—176).

Теорема 2.1. Пусть $K(x, y)$ — положительно определенное ядро, принадлежащее $L^2(G \times G)$, где G — множество конечной меры s-мерного евклидова пространства, и $\int_G |K(x, y)|^2\, dy < M = \text{const}$. Пусть далее непрерывная по совокупности аргументов функция $f(u, y)$, $y \in G$ и $u \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяет условиям: $f(u, y) \geqslant ku$, если $u \leqslant -C$ и $f(u, y) \leqslant ku$, если $u \geqslant C$, где C — некоторое положительное число и $0 < k < \lambda_1$ (λ_1 — наименьшее характеристическое число ядра $K(x, y)$). Тогда уравнение $u = Ahu$ имеет решение.

Теорема 2.2. Пусть $0 \leqslant K(x, y) \in L^2(G \times G)$, причем $\int_G |K(x', y) - K(x, y)|^2 dy \to 0$ при $\|x' - x\| \to 0$, и $|f(u, y)| \leqslant k|u| + C$, где C — некоторое положительное число и $0 < k < \lambda_0$ (λ_0 — наименьшее из абсолютных значений характеристических чисел ядра $K(x, y)$ или $\lambda_0 = +\infty$, если $K(x, y)$ не имеет характеристических чисел). Тогда уравнение $u = Ahu$ имеет непрерывное решение. В § 6 гл. II доказываются предложения для уравнения $u = Ahu$, когда A — ограниченный (но не вполне непрерывный) оператор из $L^\infty(G)$ в $C(G)$ и из L^∞ в L^1. В гл. III изучаются алгебраические интегральные уравнения (РЖМат, 1954, 2970). Для них устанавливаются различные предложения. В том случае, когда $f(u, y)$ — многочлен от u, выяснена связь между множествами решений уравнения $u = Ahu$ и совокупностью решений уравнений $u = A_n hu$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), когда $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Примечание референта. Рассуждения при доказательстве теоремы 2.1 не вполне корректны, так при доказательстве непрерывности Ah используется (см. стр. 15) непрерывность $A_n h$. Теорема 2.2 не полностью доказана — не доказана непрерывность оператора h, которая, правда, может быть выведена из следующей теоремы референта (Вайнберг М. М., Матем. сб., 1950, 26 (68), 365—394; Докл. АН СССР, 1950, **73**, № 2, 253—255; РЖМат, 1954, 2230): Для того чтобы h был непрерывным оператором из класса L^p в класс L^{p_1} ($p > 0$, $p_1 > 0$) или чтобы он действовал из L^p в L^{p_1}, необходимо и достаточно, чтобы $|f(u, y)| \leqslant a(y) + b|u|^r$, где $a(y) \in L^{p_1}$, $b \geqslant 0$, $r = p/p_1$. Рассуждения § 6 гл. II не полны, так как они используют слабую компактность шара пространства L^∞, т. е. свойство, которым L^∞ не обладает. Автор не учитывает, что ограничения Гаммерштейна были ослаблены в работах референта. (Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1951, 18, вып. 2, 225—257; РЖМат, 1954, 2178). М. М. Вайнберг

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8889. Интегральные уравнения продольных колебаний стержней. Кабулов В. К., Докл. АН УзССР, 1956, № 3, 7—12 (рез. узб.)

Рассматривается задача Коши о продольных колебаниях бесконечного и полубесконечного стержня с переменными поперечными сечениями, погонной плотностью материала и модулем упругости E и дается способ приведения этой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Н. А. Ростовцев

8890. Условия периодичности вынужденных продольных, поперечных и крутильных колебаний стержня с учетом последействия. Яковлева Г. Ф., Тр. Ин-та матем. и механич. АН УзССР, 1955, вып. 16, 126—138

В интегро-дифференциальном уравнении

$$L_n(z) + \int_a^x \sum_{j=1}^{l} P_j(x - t + a)\, e^{-\beta_j(x-t+a)} \times \times M_m(z)\, dt = f(x) \qquad (1)$$

$L_n(z)$ и $M_m(z)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, $\Phi(p)$ и $F(p)$ — их характеристические полиномы, P_j — полиномы степени μ_j, $f(x)$ — периодическая функция периода 2ω, меняющая знак через полупериод, $n \geqslant m$.

Уравнение

$$\varphi(p) = Q(p)\,\varphi(p) + T(p)\,F(p) = 0, \qquad (2)$$

где

$$Q(p) = \prod_{j=1}^{l} (\beta_j + p)^{\mu_j + 1};$$

$$T(p) = Q(p) \sum_{j=1}^{l} \sum_{h=0}^{\mu_j} \frac{P_j^{(h)}(a)\, e^{-\beta_j a}}{(\beta_i + p)^{h+1}},$$

называется характеристическим уравнением интегро-дифференциального уравнения (1) (РЖМат, 1954, 2972).

Приводятся без доказательства следующие результаты. Если характеристическое уравнение (2) имеет только простые корни $p_1, p_2, \ldots, p_N$, среди которых нет чисто мнимых вида $(2r+1)\pi i/\omega$, где r — целое число, то уравнение (1) либо имеет единственное периодическое решение периода 2ω, меняющее свой знак через полупериод, представимое в виде

$$z(x) = \sum_{s=1}^{N} c_s \left[e^{p_s x} \int_a^x f(t)\, e^{-p_s t}\, dt - \frac{1}{1 + e^{-p_s \omega}} \int_a^{a+\omega} f(t)\, e^{-p_s t}\, dt \right],$$

либо совсем не имеет таких решений.

Если характеристическое уравнение имеет простые корни и среди них b корней вида $(2r_k + 1)\pi i/\omega$, то периодические решения, если они существуют, имеют вид

$$z(x) = \sum_{s=1}^{N-b} c_s \left[\int_a^x f(t)\, e^{-p_s t}\, dt - \frac{1}{1 + e^{-p_s \omega}} \int_a^{a+\omega} f(t)\, e^{-p_s t}\, dt \right] + \sum_{k=0}^{b} \left[Q\left(\frac{2r_k + 1}{\omega} \pi i \right) \int_a^x f(t)\, e^{-\frac{2r_k+1}{\omega}\pi i t}\, dt + A_k \right] e^{\frac{2r_k+1}{\omega}\pi i k}$$

Здесь c_s и A_k — постоянные.

Формулируются также результаты для случая кратных корней характеристического уравнения. Во всех случаях приводятся достаточные условия для существования или отсутствия периодических решений. Указанные результаты применяются для исследования вынужденных продольных, поперечных и крутильных колебаний стержня с учетом последействия, когда внешняя сила $F(x, t)$ имеет вид

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{n} B_k \sin k\omega t \cos \pi x k / l,$$

а начальные и краевые условия являются линейной комбинацией функций $\cos(k\pi x/l)$ или $\sin(k\pi x/l)$. Соответствующие интегро-дифференциальные уравнения свободных колебаний с учетом последействия приведены у М. И. Розовского (Изв. АН СССР, отд. техн. н., 1948, № 5, 601—622). Ю. К. Ландо

См. также: 8731, 8879, 8809, 8814, 8817, 8819, 8853, 8854, 8859, 8928, 9147 К

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

8891. Непрерывная зависимость теорем о среднем. Попович (Folytonos függvények középértéktételeiről. Popoviciu Tiberiu), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, **4**, № 3, 353—356 (венг.)

Формулируются без доказательства отдельные теоремы о среднем из теории конечных разностей.

Вводим обозначения:

$$[x_2; f] = f(x_1), [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] - [x_1, \ldots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1};$$

$$D_i^1[\{x_i\}; f] = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}; f];$$

$$U^{n,k}_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}}[\{x_i\}; f] = \begin{vmatrix} D^k_{i_1}[\{x_i\}; x^k], D^k_{i_1}[\{x_i\}; x^{k+1}] \ldots D^k_{i_1}[\{x_i\}; x^{k+n-1}], D^k_{i_1}[\{x_i\}; f] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^k_{i_{n+1}}[\{x_i\}; x^k], D^k_{i_{n+1}}[\{x_i\}; x^{k+1}] \ldots \\ \ldots D^k_{i_{n+1}}[\{x_i\}; x^{k+n-1}], D^k_{i_{n+1}}[\{x_i\}; f] \end{vmatrix};$$

$$D^{n,k}_{i_{1_1}i_{2_2},\ldots i_{n+1}}[\{x_i\}; f] = \frac{U^{n,k}_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}}[\{x_i\}; f]}{U^{n,k}_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}}[\{x_i\}; x^{k+n}]}.$$

При этом узловые точки x_i и x_i', а также точки ξ_i для разных индексов предполагаются различными. Также предполагается, что индексы i_j для разных j различны, причем, если индекс j растет, то растут также величины i_j, ξ_i, x_i и x_i'. Предполагается, что ξ_i лежит в наименьшем интервале, содержащем x_i. Если x_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ заданы и $f(x)$ непрерывна на интервале, содержащем x_i, тогда существует такое ξ, что можно выбрать $(n+1)$ точку: x_i' так, что ξ содержится между ними и $[x_1', x_2', \ldots x_{n+1}'; f] = [x_1, x_2, \ldots x_{n+1}; f]$ Существуют также $c \in (x_1, x_{n+1})$ и h такие, что

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n!\, h^n} \times \times \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(c + ih).$$

Существуют положительные и не зависящие от f B_i с $\sum_{i=1}^{m-k-n} B_i = 1$ такие, что

$$D^{n,k}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}[\{x_i\}; f] = \sum_{i=1}^{n} B_i D_i^{n+k}[\{x_j\}; f].$$

Если $f(x)$ непрерывна в интервале (x_1, x_{n+1}) и $k \leqslant n$, то существуют точки $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{n-k}$ такие, что в каждой системе их окрестностей найдутся такие точки $x_i'[i = 1, 2, \ldots, (n-k-1)(k+1)]$, для которых $\xi_j \in (x'_{j(k+1)+1}, x'_{(j+1)(k+1)})$ и

$$D^{n-k,k}_{1,(k+1)+1,2(k+1)+1,\ldots,(n-k)(k+1)+1}[\{x_j'\}; f] = [x_1, \ldots, x_{n+1}; f].$$

Если существует также $f^{(k)}(x)$ в (x_1, x_{n+1}), то существуют $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-k}$ такие, что имеет место

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{k!}{\binom{n}{k}} [\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-k}; f^{(k)}].$$

Это показывает, что эта теорема может быть применена при оценке остаточного члена в численных методах анализа. J. Aczél

8892. Упрощение условий теоремы Шварца. Льоренте-Гонсалес Гальярса (Reduccion de las hipotesis del teorema de Schwarz. Llorente Gonzales-Gallarza F.), Euclides, 1955, **315**, № 174—175, 259—264 (исп.)

Приводится теорема об условиях равенства $f''_{xy} = f''_{yx}$, требования которой несколько упрощены по сравнению с известной теоремой Шварца. Дается пример функции, для которой не выполняются условия теоремы Шварца, а условия данной теоремы выполняются.

Указав на известную связь между проблемой равенства смешанных производных с проблемой равенства пределов, автор приводит необходимое и достаточное условие независимости второй частной производной от порядка дифференцирования.

С. И. Зуховицкий

8893. Некоторые замечания относительно формулы Стирлинга. Эйссен (Some remarks on Stirling's formula. Aissen M. I.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 10, 687—691 (англ.)

Даны два доказательства известной формулы Стирлинга

$$n! \sim C \cdot \sqrt{n} \cdot n^n e^{-n}, \qquad (1)$$

где C — некоторая постоянная. При этом уточнены доказательства, объясняющие существенную роль каждого из сомножителей в (1), в частности множителя $\sqrt{n}$.

К. М. Слепенчук

8894. По поводу формулы Дюамеля. Петрюс (A propos de la formule de Duhamel. Pétrus A.), Rev. math. spéc., 1956, **66**, № 7, 165—166 (франц.)

Применение формулы

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (1)$$

к выводу остаточных членов некоторых формул квадратур (трапеций Симпсона).

Примечание референта. Формулу (1) автор приписывает Дюамелю, датируя 1841 г. Однако она содержится в курсе Коши, изданном в 1829 г. (Cauchy A., Leçons sur le calcul différentiel, Paris, 1829,37). И. П. Натансон

8895. Об одном двукратном интеграле. Гойдо Ш. М., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, сер. матем., 1955, вып. 1, 25—29

Рассматривается двойной интеграл Валле — Пуссена

$$V_{n,m}(x, y) = \iint_Q f(u, v) V_n(u - x) V_m(v - y)\, du\, dv,$$

где Q — квадрат $-\pi \leqslant u,\ v \leqslant \pi$, а $V_n(t) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \times \times \frac{1}{2\pi} \cos^{2n} \frac{t}{2}$.

Если $\omega(\lambda, \mu)$ — модуль непрерывности 2π-периодиче-

ской по каждому аргументу функции $f(x, y)$, то

$$|V_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant 5\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

Примечание референта. Результат автора является частным случаем одной теоремы референта. (Докл. АН СССР, 1951, 81, № 5, 737—739). И. П. Натансон

8896. Представление некоторых определенных интегралов с помощью определителей. Ч. 3. Обобщенные непрерывные дроби. Шентон (A determinantal expansion for a class of definite integral. Part 3. Generalised continued fractions. Shenton L. R., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, **10**, № 3, 134—140 (англ.)

В силу результата, полученного автором в первой части (РЖМат, 1954, 4398), имеет место формула

$$\int_a^b \frac{w(x)}{\prod_{j=1}^{n}(z_j - x)}\,dx = \lim_{s\to\infty} \frac{N_s(z_1, \ldots, z_n)}{D_s(z_1, \ldots, z_n)},$$

если

$$\prod_{j=1}^{n}(z_j - x) > 0.$$

Приписывая этому интегралу разложение в непрерывную дробь, автор рассматривает отношение $R_s = N_s / D_s$ как ее s-ю подходящую. Оба эти факта имеют место при $n = 1$.

Частные выражения для R_s, N_s, D_s даны в случаях, когда $\theta_s(x) = (\nu - x)^s$; $\{\theta_s(x)\}$ — ортонормальная система веса $w(x)$; $\{q_s(x)\}$ — некоторая ортогональная система веса $w(x)\prod_{j=1}^{n}(z_j - x)$. Г. П. Сафронова

8897. Добавление к теоремам Хаусдорфа о моментных последовательностях. Натансон И. П., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 2, 191—194

Приведены условия, при которых последовательность $\mu_m, \mu_{m+1}, \ldots$ допускает представление

$$\mu_k = \int_1^0 x^k\,dg(x) \qquad (1)$$

или

$$\mu_k = \int_0^1 x^k \varphi(x)\,dx \qquad (k = m, m+1, \ldots). \qquad (2)$$

Используется обозначение:

$$\Delta^r \mu_k = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_r^i \mu_{i+k}.$$

Если существует такая постоянная $H > 0$, что

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| < H \qquad (n = m, m+1, \ldots),$$

то существует функция $g(x)$ с ограниченным изменением, удовлетворяющая (1). Если, кроме того, $\Delta^r \mu_k \geqslant 0$ $(k = m, m+1, \ldots;\ r = 0, 1, \ldots)$, то среди $g(x)$ имеются возрастающие функции.

При соблюдении условий:

$$(n+1)^{p-1}\sum_{k=m}^{n} |C_n^k \Delta^{n-k}\mu_k|^p < H$$
$$(n = m, m+1, \ldots;\ p > 1)$$

существует единственная $\varphi(x) \in L_p$, удовлетворяющая (2). $\varphi(x)$ измерима и ограничена, если

$$(n+1)\,C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| < H \quad (n = m, m+1, \ldots; m \leqslant k \leqslant n).$$

Все указанные условия необходимы и достаточны. При $m = 0$ они переходят в условия теорем, доказанных Хаусдорфом.

В другой форме условия существования представления (1) с неубывающей $g(x)$ получены референтом (РЖМат, 1954, 3288). А. А. Нудельман

8898. Определение семейств ортогональных многочленов, у которых производные ортогональны. Кемпбелл (Détermination de la famille des polynomes orthogonaux dont les dérivés sont orthogonaux. Campbell Robert), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 9, 1110—1111 (франц.)

С помощью теоремы Фавара о существовании интегрального веса для системы многочленов, связанных рекуррентной формулой, строится система ортогональных многочленов, производные которых также ортогональны. П. К. Суетин

8899. Линейные разностные уравнения и преобразования рядов Дирихле. Форт (Linear difference equations and the Dirichlet series transform. Fort Tomlinson), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 9, 641—645 (англ.)

Для решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами преобразование рядов Дирихле является, по сравнению с интегральным преобразованием Лапласа, более простым и более естественным инструментом. Это преобразование сопоставляет функции $a(t)$ целочисленного переменного t функцию $f(s)$ комплексного переменного s по формуле

$$f(s) = D\{a(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} m^{-st} a(t), \text{ где } m > 1, \qquad (1)$$

причем предполагается, что ряд (1) сходится в полуплоскости $R(s) > 1$.

Если $\Delta^n a(t)$ — разность n-го порядка функции $a(t)$, то:

$$D\{\Delta a(t)\} = -m^s a(0) - (1 - m^s) D\{a(t)\};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D\{\Delta^n a(t)\} = -m^s \Delta^{n-1} a(0) + m^s (1 - m^s)\Delta^{n-2} a(0) + \ldots \qquad (2)$$
$$\ldots + (-1)^n m^s (1 - m^s)^{n-1} a(0) + (-1)^n (1 - m^s)^n \times$$
$$\times D\{a(t)\}.$$

Вводя обозначения: $t^{(r)} = t(t-1)\ldots(t-r+1)$; $t^{(0)} = 1$; $(m^s - e^{-iq})^{r+1} = X + Yi$, находим

$$D\{t^{(r)} k^t\} = r!\, m^s k^r / (m^s - k)^{r+1}, \qquad (4)$$

$$D\{t^{(r)} \sin qt\} = r! m^s \frac{Y \cos rq + X \sin rq}{(m^{2s} + 1 - 2m^s \cos q)^{r+1}};$$

$$D\{t^{(r} \cos qt\} = r! m^s \frac{X \cos rq - Y \sin rq}{(m^{2s} + 1 - 2m^s \cos q)^{r+1}}.$$

Например, разностное уравнение $\Delta y(t) - y(t) = t$ преобразуется в уравнение $-m^s y(0) - (1 - m^s) f(s) - f(s) = m^s / (m^s - 1)^2$, откуда

$$f(s) = -\frac{m^s}{m^s - 1} - \frac{m^s}{(m^s - 1)^2} + \frac{m^s}{m^s - 2} + y(0)\frac{m^s}{m^s - 2};$$

по формуле (4) находим $y(t) = -1 - t + 2^t + y(0)\,2^t$.

Ю. Л. Рабинович

8900. Функциональное уравнение, возникшее в теории распределения. Беллман (A functional equation arising in allocation theory. Bellman Richard), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, **3**, № 3, 129—132 (англ.)

Относительно решения функционального уравнения

$$f(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))]$$

методом последовательных приближений доказывается теорема:

В предположении, что

а) $g(x)$ и $h(x)$ — обе строго вогнуты для $x \geqslant 0$, монотонно возрастающие и $g(0)\,h(0) = 0$

b) $g'(0)(1-a) > h'(0)/(1-b)$, $h'(0) > g'(\infty)$, $b > a$, $0 < a$, $b < 1$

справедливо следующее:

а) $y = x$ для $0 \leqslant x \leqslant \bar{x}$, где $\bar{x}$ — корень уравнения

$$h'(0) = g'(x) + (b-a)g'(ax) + (b-a)ag'(a^2x) + \ldots,$$

b) $y = y(x)$ для $x > \bar{x}$, где $0 \leqslant y(x) < x$ и $y(x)$ есть решение уравнения

$$g'(y) - h'(x-y) + (a-b)f'(ay - b(x-y)) = 0.$$

Э. А. Чернышенко

8901. О решениях функционального уравнения $f[f(x)] = f(x)$. Захарчук Е. Ю., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1955, вып. 1, 35—40

Рассматривается функциональное уравнение

$$f[\varphi(x)] = f(x), \qquad (1)$$

$\varphi(x)$ — данная непрерывная и монотонная функция ($-\infty < x < \infty$). С помощью итерации строится бесконечная в обе стороны последовательность:

$$\ldots \varphi_{-n}(x), \ldots \varphi_{-1}(x), x, \varphi_1(x), \ldots . \varphi_n(x), \ldots \qquad (2)$$

где

$$\varphi_1(x) = \varphi(x),\ \varphi_2(x) = \varphi_1[\varphi_1(x)], \ldots, \varphi_n(x) =$$

$$= \varphi_1[\varphi_{n-1}(x)], \ldots;$$

$$\varphi_{-1}(x) = \varphi^{-1}(x),\ \varphi_{-2}(x) = \varphi_{-1}[\varphi_{-1}(x)], \ldots$$

$$\ldots \varphi_{-n}(x) = \varphi_{-1}[\varphi_{-n+1}(x)], \ldots$$

I. В случае, когда $\varphi(x)$ — возрастающая функция и a_k и a_{k+1} — два последовательных корня уравнения

$$\varphi(x) = x, \qquad (3)$$

они являются предельными точками последовательности (2) при любом $x \in (a_k, a_{k+1})$, при этом $\varphi_n(x)$, убывая, сходятся к a_k, а $\varphi_{-n}(x)$, возрастая, имеют своим пределом a_{k+1} (ср. Дубровский В. М., Успехи матем. наук, 1954, **9**, вып. 3 (61), 127—133). Уравнение (1) в этом случае имеет только тривиальные решения $f(x) = \text{const}$.

Если уравнение (3) корней не имеет, у последовательности (2) нет предельных точек. Исходное же уравнение (1) имеет нетривиальные решения вида:

$$y = f(\varphi_{-k+1}(x)],\ x \in [\varphi\ (x_0),\ \varphi_{k-1}(x)] \quad (k = 1, 2\ldots), \qquad (4)$$

где f — произвольная непрерывная функция.

II. Когда $\varphi(x)$ — убывающая функция, уравнение (3) имеет единственный корень $x = a$, причем, если на графике функции $\varphi(x)$ нет точек, симметрических относительно прямой $y = x$, то одна из последовательностей $\{\varphi_n(x)\}$ или $\{\varphi_{-n}(x)\}$ сходится к a при любом x (ср. Дубровский, предыдущая ссылка), а уравнение (1) имеет лишь решения вида $f(x) = c$. В случае же существования указанных симметрических точек уравнение (1) имеет нетривиальные решения.

А. Г. Школьник

8902. Сходимость решений одного класса итеративных разностных уравнений. Самолов (The convergence of the solutions of a class of iterative difference equations. Samoloff J.), J. Math. and. Phys., 1954, **33**, № 1, 105—110 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть функция $f(p) = f(x_1, \ldots, x_p)$ определена в области C, $B \leqslant x_j \leqslant A$ $(j = 1, \ldots, p)$ и удовлетворяет условиям:

1. $\lim_{\text{все } x_j \to x} f(x_1, \ldots, x_p) \equiv x$,

2. $f(x, \ldots, x) \equiv x$,

3. при $\delta = \max x_j - \min x_j$

$$\inf_{P \in C,\ \delta \neq 0} \left\{ \frac{\max x_j - f}{\delta} \right\} > 0, \quad \inf_{P \in C,\ \delta \neq 0} \left\{ \frac{f - \min x_j}{\delta} \right\} > 0$$

Тогда последовательность a_n, определяемая равенствами $a_{n+p} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p})$, при любых начальных значениях $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in C$ сходится к функции $F(a_0, \ldots, a_{p-1})$, однозначно определяемой свойствами:

а) $\lim_{a_j \to x} F(a_0, \ldots, a_{p-1}) \equiv x$,

в) $F(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \equiv F(a_1, a_2, \ldots, f(a_0, \ldots, a_{p-1}))$.

Г. Ш. Рубинштейн

8903. О некотором решении двух функциональных уравнений. Байрактаревич (O неким решењима двију функционалних једначина. Бајрактаревић Махмуд), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, **6**, № 3—4, 172—184 (серб.; рез. франц.)

В работе автора (РЖМат, 1955, 1807) дано решение функционального уравнения

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi_i\right) = w\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\omega_i \Big/ \sum_{i=1}^{n}\omega_i\right) \qquad (1),$$

$$\left(t_i \in [a, b],\ i = 1, 2, \ldots, n,\ M_i = M(t_i);\ \psi_i = \psi(t_i);\ \omega_i = \omega(t_i)\right),$$

где ψ^{-1} и w есть обратные функции от функций ψ и M, для $n = 2$.

В реферируемой статье доказано, что уравнение (1) для $n = 3, 4, 5, \ldots$ в предположении, что ψ, M и ω-функции дважды дифференцируемые на $[a, b]$, функции ψ и M строго монотонны и $\omega \neq 0$ на $[a, b]$, имеет одно и только одно решение, которое представимо в виде

$$M = \alpha + \beta/\omega \quad (\beta \neq 0),$$

$$\psi = \gamma\omega + \delta \quad (\gamma \neq 0),$$

где α, β, γ, δ — произвольные константы, а ω — произвольная строго монотонная функция на $[a, b]$.

Далее решается функциональное уравнение

$$\psi^{-1}\left\{\frac{1}{\beta - \alpha}\int_{t_1}^{t_2}\psi\,dt\right\} = w\left\{\frac{\int_{t_1}^{t_2} M\omega\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}\omega\,dt}\right\} \quad (t_1, t_2 \in [a, b]). \qquad (2)$$

При некоторых предположениях доказано, что для того, чтобы система функций ψ, M и ω представляла решение уравнения (2), необходимо, чтобы эти функции удовлетворяли условиям:

1) $\psi' = C\omega^2 M'$ $(C \neq 0)$,

2) $\psi''/\psi' = C'\psi'^{2/3}(\omega/\omega') + (\omega''/\omega') \quad (C' \neq 0)$, (3)

3) $\int \frac{\omega\, dt}{\sqrt[3]{\omega'}} = \frac{3}{2}\,\omega'^{3/2}\,\frac{40\,\omega\omega''^2 - 15\,\omega'^2\omega'' - 21\,\omega\omega'\omega'''}{40\,\omega''^3 - 45\,\omega'\omega''\omega''' - 9\,\omega'^2\omega^{IV}}$

или условиям

1) $\psi' = C\omega^2 M' \quad (C \neq 0)$, (3′)

2) $\psi''/\psi' = \omega''/\omega'$,

3) ω — произвольная строго монотонная функция. Условия (3′) являются также и достаточными.

Э. А. Чернышенко

8904. Линейные неоднородные функциональные уравнения. Гермэнеску (Ecuaţii funcţionale liniare neomogene. Gh e r m ă n e s c u M.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 3, 489—498 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(M)\, f(M_{n-i}) = F(M), \qquad (1)$$

где $M = M_0$ — точка r-мерного пространства, $M_{i+1} = \theta(M_i)$, θ — данный оператор, φ_i и F — данные функции, f — искомая функция. При $F \equiv 0$ общее решение имеет вид

$$f(M) = \sum_{i=1}^{p} C_i(M)\, f_i(M), \qquad (2)$$

где $C_i(M_1) = C_i(M)$, $p \leqslant n$. Для решения неоднородного уравнения автор предлагает метод вариации «итеративных постоянных» $C_i(M)$, т. е. решение ищется в виде (2), где теперь $C_i(M_1) = C_i(M) + D_i(M)$. Показано, что каждое D_i определяется уравнением, подобным (1), но порядка $n - p$. Зная D_i, легко найти C_i. Метод применим также к соответствующим системам уравнений.

В статье не формулированы условия, налагаемые на данные и искомые функции; при решении примеров используется непрерывность функции f и существование обратного оператора θ^{-1}.

Г. К. Энгелис

8905 К. Анализ. II. Кимура (精說 . 解析 ., I . 木村直樹 . 有朋堂, 530 頁,35頁, 420 圖, Юходо, 1954, 530 стр., 420 илл) (япон.)

8906 К. Анализ III. Кимура (最新解析 . III. 木村勇三 法文社, 407 頁 , 270 圖 , Хобунся, 1954, 407 стр., 270 илл) (япон.)

8907. К. Основы математического анализа. Том I. Фихтенгольц Г. М. М., Гос. изд.-во техн-теор. лит., 1955, 440 стр. 9 р. 75 к.

Двухтомный учебник математического анализа для студентов первых двух курсов механико-математических и физико-математических факультетов университетов. Составлен на базе известного трехтомного сочинения автора («Курс дифференциального и интегрального исчисления») с соответствующими сокращениями и переработкой, цель которых — большее приближение содержания к действующей программе по математическому анализу.

В гл. I излагается дедекиндова теория вещественных чисел. Понятие функции одной переменной и элементарные функции рассматриваются в гл. II.

Исходным в изложении теории пределов (гл. III) является понятие предела последовательности. С помощью предела последовательности дается определение предела функции непрерывного аргумента, а лишь затем «ε — δ» определение этого понятия. Именно такая последовательность сохраняется в книге при определении каждого нового вида предела. Далее излагаются теоремы о пределах, рассматривается предел функции целочисленного аргумента, лемма о вложенных промежутках, устанавливается признак существования предела монотонной функции в общем случае, затем доказаны лемма Больцано-Веерштрасса, условие существования конечного предела функции любого аргумента (принцип сходимости). Глава завершается классификацией бесконечно малых и бесконечно больших величин. В гл. IV рассматривается теория непрерывных функций. Гл. V, VI, VII посвящены изложению дифференциального исчисления функций одной переменной. Основные понятия, связанные с функциями нескольких переменных, излагаются в гл. VIII. Даются определения открытой и замкнутой областей в n-мерном пространстве, предела функции, повторных пределов, доказана теорема о связи между повторным и двойным пределами. Изучены понятие непрерывности функции многих переменных и свойства непрерывных функций.

Гл. IX посвящена дифференцированию функций нескольких переменных. Кроме основных фактов и теорем, рассматриваются однородные функции (доказана формула Эйлера). Изучаются дифференциалы высших порядков, экстремумы функций (приводятся необходимые и достаточные условия).

Основы интегрального исчисления изложены в двух последующих главах.

Гл. XII посвящена многочисленным геометрическим и механическим приложениям интегрального исчисления. Дается точное определение понятия площади (объема), рассматриваются его свойства и выражения в виде определенного интеграла. Определяется понятие спрямляемой дуги и дается выражение дуги интегралом. Излагается общая схема применения определенного интеграла к вычислению механических и физических величин, которая иллюстрируется далее на ряде задач (площадь поверхности вращения, статические моменты и центр тяжести, механическая работа).

Среди некоторых геометрических приложений дифференциального исчисления (гл. XIII) находим: задачи о составлении уравнений касательной и нормали (нормальной плоскости) к плоской (пространственной) кривой, касательной плоскости и нормали к поверхности, об исследовании линии на выпуклость, вогнутость, точки перегиба и комплекс вопросов, связанных с кривизной.

Заключительная глава первого тома представляет собой исторический очерк возникновения основных идей математического анализа от предистории дифференциального и интегрального исчисления до работ Ньютона и Лейбница. Кроме этого, целый ряд замечаний историко-математического характера, встречающихся в различных частях книги, позволяют читателю ориентироваться в хронологии важнейших открытий в области математического анализа.

Во всех разделах изложение иллюстрируется большим количеством примеров, подчеркивающих факт глубокой связи математического анализа как с другими разделами математики, так и с техникой, естествознанием.

Л. Е. Садовский

8908 К. Дифференциальное исчисление. I. Ярник (Diferenciální počet. I. 4 vyd. J a r n í k V o j t ě c h. Praha, Nakl. československ. akad. věd., 1955, 451 str., il., 42, 60 Kčs) (чеш.)

Книга рассчитана на студентов математических факультетов университетов и представляет собой пособие для изучения дифференциального исчисления. Книга состоит из 15 глав.

Гл. I посвящена иррациональным числам, доказаны теоремы Дедекинда и теоремы о max и min. Гл. II посвящена числовым последовательностям. Здесь даны теоремы о пределах и дан выход числа «e».

В гл. III дано понятие логарифма. Гл. IV посвящена теории бесконечных рядов. Здесь приведены основные

теоремы о сходимости рядов. Рассматриваются ряды с положительными членами, дано понятие абсолютной сходимости рядов. Заключение посвящено бесконечным десятичным дробям.

Гл. V рассматривает понятие непрерывности и предела функций одной действительной переменной. Дано понятие монотонной последовательности и бесконечных пределов. Гл. VI посвящена тригонометрическим функциям.

Предметом гл. VII являются обратные функции, в основном обратные тригонометрические функции. Гл. VIII содержит определение производной и основные правила дифференцирования, включая дифференцирование сложных и обратных функций.

В гл. IX доказываются основные теоремы для непрерывных функций (теоремы Вейерштрасса, Ролля и Лагранжа). Гл. X посвящена определению поведения функции по ее производной. Речь идет о монотонности функции, об экстремумах. В гл. XI приведено правило Лопиталя и дано понятие бесконечно малой величины. Гл. XII содержит доказательство теоремы Тейлора в общем случае и дан ряд Тейлора с остаточным членом в форме Коши и Лагранжа. Кроме того, дано разложение в ряд Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\lg(1+x)$, $(1+x)^a$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

Гл. XIII содержит понятие функции двух переменных. Дано понятие непрерывности, частных производных, полного дифференциала. Гл. XIV посвящена неявным функциям, определяемым уравнением $F(x, y) = 0$. Приведена теорема о существовании неявной функции. И, наконец, гл. XV посвящена понятию и свойствам комплексных чисел. Č. Vitner

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

8909. Краткое доказательство расходимости бесконечного ряда $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p_r}$. Дукс (Ein kurzer Beweis der Divergenz der unendlichen Reihe $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p_r}$. Dux Erich), Elem. Math., 1956, **11**, № 3, 50—51 (нем.)

Известно, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}$, где p_i — последовательность простых чисел, расходится. Дается доказательство этого, не опирающееся на понятие бесконечного произведения. И. И. Огиевецкий

8910. О признаке сходимости знакопеременных рядов. Ларивьер (On a convergence test for alternating series. Lariviere R.), Math. Mag., 1955, **29**, № 2, 88 (англ.)

С методической целью предлагаются в качестве примеров два знакопеременных ряда: расходящийся и сходящийся, у которых признак сходимости Лейбница выполнен не полностью.

На 13-й строке снизу опечатка: вместо $\frac{(\sqrt{2})^{(-1)^{n+1}}}{nn}$ должно быть $\frac{(\sqrt{2})^{(-1)^{n+1}}}{n}$ В. А. Магарик

8911. Геометрическая интерпретация знакопеременных рядов. Орлов (Une interprétation géométrique des séries alternées. Orloff Constantin), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. реп. Србије, 1955, **7**, № 1—2, 3—10 (франц.; рез. серб.)

После описания геометрической интерпретации знакопеременных рядов, предложенной М. Миланковичем и М. Беричем (Milankowitch M., Z. math. naturwiss. Unterricht, 1909, **40**, № 6/7, 22; Berič M., Glas Srpske Akademije Nauka, XCIII, Prvi razred 39. Beograd, 1921), формулируются в геометрических терминах и доказываются необходимые и достаточные условия, при которых знакопеременный ряд I) абсолютно сходится; II) сходится, но не абсолютно; III) расходится. Формулируются геометрические признаки суммируемости C_1 знакопеременных рядов, доказательства которых не приведены. В. А. Магарик

8912. Об остаточном члене синусоидального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. Сас (A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ sinus-sor maradéktagjáról. Szász Pál), Mat. lapok, 1955, **6**, № 2—3, 130—137 (венг.; рез. русс., нем.)

Фейер (Fejér L., J. reine and angew. Math., 1913, **142**, 165—188) нашел замечательную формулу:

$$\frac{\pi-x}{2}+S_n(x)=\left[\frac{1}{2(n+1)}\right]\int_x^{\pi}\left(\frac{\sin[(n+1)t/2]}{\sin(t/2)}\right)^2 dt$$

для арифметического среднего $S_n(x)$ первых $(n+1)$ частных сумм синусоидального ряда

$$0+\sin x/1+\sin(2x)/2+\ldots+\sin(nx)/n+\ldots$$

В настоящей статье указывается, что внутри интервала $(0, 2\pi)$

$$\frac{\pi-x}{2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu\alpha}{\nu}=$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\left\{\frac{\cos[(2n+1)x/2]}{\sin(x/2)}-\frac{1}{2}\int_x^{\pi}\frac{\cos(n+1)t}{\sin^2(t/2)}\,dt\right\}.$$

На основании этой формулы выводится асимптотическое выражение Фейера для этой разности

$$\frac{\pi-x}{2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{\cos[(2n+1)x/2]}{\sin(x/2)}+\eta_n(x)\right\}(0<x<2\pi),$$

где при $n\to+\infty$ в подинтервале $\delta\leqslant x\leqslant 2\pi-\delta$, причем $\eta_n(x)\to 0$ равномерно для $\delta\leqslant x\leqslant 2\pi-\delta$, $0<\delta<\pi$.

Резюме автора.

8913. Об одном применении обобщенного признака сходимости Лобачевского. Лунц Г. Л. В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9, М., Гостехтеоретиздат, 1956, 209—214.

Неравенство

$$\frac{a-1}{a}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_m}{a^m}\leqslant\sum_{m=2}^{\infty}f(m)\leqslant(a-1)\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_m}{a^m}\qquad(1)$$

$\left(f(m)>0$ и не возрастает, $f(2)<f(1)=\frac{1}{a}<1$, $r_m=p_m-1$, p_m — наибольшее целое, при котором $f(p_m)\geqslant\frac{1}{a^m}\right)$,

являющееся обобщением неравенства, с помощью которого обосновывается признак сходимости Лобачевского, применяется к доказательству существования (и вычислению) предела суммы некоторого ряда Дирихле в граничной точке его полуплоскости сходимости.

Из (1) при $a=\alpha^s(\alpha>1, s>0)$ и $f(m)=e^{-\nu(m)s}$, $\nu(x)$ — непрерывная возрастающая функция, рост которой при $x\to\infty$ подчинен условиям: $\nu(x)\to\infty$, $\nu'(x)\to\infty$, $\frac{\nu'(x)}{\nu(x)}\to 0$; $\ln\nu(1)=\ln\alpha$, выводится соотношение:

$$(\alpha^s-1)\psi(s)-\frac{1}{\alpha^s}-\alpha^s\varphi(s)\leqslant$$

$$\leqslant(\alpha^s-1)\sum_{m=2}^{\infty}\left\{\lambda(m)\right\}\alpha^{-ms}\leqslant(\alpha^s-1)\ \psi(s)-\frac{1}{\alpha^s}\varphi(s).\quad(2)$$

В этом неравенстве $\psi(s)=\sum_{m=2}^{\infty}e^{-m\ln\alpha^s}$, $\varphi(s)=\sum_{m=2}^{\infty}e^{-\nu(m)s}$; $\lambda(m)$ определяется условием $\nu[\lambda(m)]=m\ln\alpha$ и, как это следует из характера роста $\nu(x)$, возрастает так, что при $x\to\infty$ $\lambda(x)\to\infty$, $\lambda'(x)\to 0$ и $x\lambda'(x)\to\infty$, а из этого вытекает, что $\lambda(x)$ распределена равномерно; $\{\lambda(m)\}$ — дробная доля функции $\lambda(m)$.

При $s\to 0^+$ средний член неравенства (2) имеет своим пределом $\overline{\{\lambda(m)\}}$ — среднюю дробную долю функции $\lambda(m)$; существование ее и равенство $\overline{\{\lambda(m)\}}=\frac{1}{2}$ следует из равномерности распределения $\lambda(m)$. И так как при $s\to 0^+$ $(\alpha^s-1)\varphi(s)\to 0$, то переход к пределу в (2) приводит к выводу:

$$\lim_{s\to 0^+}[(\alpha^s-1)\psi(s)-\varphi(s)]=3/2.$$

А. Г. Школьник

8914. Об одном классе признаков сходимости для рядов с положительными и монотонно убывающими членами. Бондарь В. П., Уч. зап. Гродненск. гос. пед. ин-та, сер. матем., 1955, вып. 1, 17—20

Последовательность $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_1<\lambda_2<\ldots)$ автор называет K-последовательностью, если любой ряд Σa_n, у которого $a_n\downarrow 0$, сходится или расходится одновременно с рядом $\Sigma\Delta\lambda_n a_{\lambda_n}$

Если

$$\delta_n=\frac{\Delta\lambda_n}{\Delta\lambda_{n-1}}\to\infty$$

и при некотором r

$$\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{r\text{ раз}}\sum_{s=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{s}\delta_k=o(\delta_n),$$

то $\{\lambda_n\}$ не есть K-последовательность.

Примечание референта. Рассуждения автора неубедительны. Они основаны на том, что для любого положительного расходящегося ряда ΣU_k расходится и ряд $\Sigma\frac{U_k}{S_n\ln S_n}$, где $S_n=U_1+\ldots+U_n$. Это предложение, верное при условии ограниченности чисел U_n, в общем случае несправедливо (пример: $U_n=e^{n^2}$), а применяется оно как раз тогда, когда $U_n=\Delta\lambda_{n-1}\to\infty$.

И. П. Натансон

8915. Об одной проблеме Фейера о бесконечных произведениях. Миколаш (Egy végtelen szorzatokra vonatkozó Fejér-féle problémáról. Mikolás Miklós), Mat. lapok, 1955, 6, № 2—3, 198—209 (венг.; рез. русс., нем.)

Л. Фейер впервые ввел в рассмотрение обобщенные бесконечные произведения, среди которых содержится как частный случай произведение Валлиса и значение которых можно выразить в замкнутом виде при помощи элементарных функций.

Автор ранее (Acta scient math., 1950, 12, A68—72) исследовал произведения типа

$$P=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{([a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+\nu}]/[\nu+1])^{\nu+1}}{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+\nu}}\quad(\nu\geqslant 1),$$

где $\{a_n\}$ означает строго монотонно возрастающие положительные последовательности чисел.

Исследуется возможность представления произведений типа

$$Q=\prod_{\substack{Z=A+nD\\ n=0,\,1,\,2,\ldots}}\left(\frac{\mathfrak{A}_\nu(z)}{\mathfrak{G}_\nu(z)}\right)^\nu=\prod_{\substack{z=A+nD\\ n=0,\,1,\,2,\ldots}}\frac{(z+\nu-1)d/2)^\nu}{z(z+d)\ldots(z+\nu-1d)}\quad(1)$$

в замкнутом виде; d, A и D — фиксированные, отличные от нуля комплексные числа, z означает комплексную переменную, $\mathfrak{A}_\nu(z)$ и $\mathfrak{G}_\nu(z)$ $(\nu\geqslant 2)$ представляют собой арифметическое и геометрическое среднее величин $z, z+d, \ldots, (z+(\nu-1)d)$. Введем обозначения $\alpha=A/D$, $\delta=d/D$, $h=(\nu-1)/2$.

Теорема 1. Произведение Q в (1) является тогда и только тогда сходящимся, если в ряде чисел $\alpha+h\delta$, $\alpha+\mu\delta$, $(\mu=0,1,\ldots,\nu-1)$ нулевое или отрицательное целое число не встречается. В этом случае значение Q всегда можно выразить в замкнутом виде при помощи гамма-функции, т. е. справедлива формула (2)

$$Q=\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\delta)\ldots\Gamma(\alpha+\overline{\nu-1}\delta)\Gamma(\alpha+h\delta)^{-\nu}\quad(2)$$

и формула $Q=\alpha\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1/2)}\right)^2$,

$$Q=\frac{(\alpha+\nu-2)(\alpha+\nu-3)\ldots(\alpha+[h])^{2h-[h]}}{\alpha(\alpha+1)^2\ldots(\alpha+[h]-1)^{[h]}}\left(\frac{\Gamma(\alpha+[h])}{\Gamma(\alpha+h)}\right)^\nu,$$

$$Q=(2\pi)^h\nu^{1/2-\nu\alpha}\frac{\Gamma(\nu\alpha)}{\Gamma(\alpha+h/\nu)^\nu},$$

$$Q=\prod_{\mu=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]-1}\frac{\pi\theta_\mu}{\sin\pi\theta_\mu}$$

являются соответственно особыми случаями последней при следующих условиях: $\delta=1$ и $\nu=2$; $\delta=1$, $\nu>2$; $\delta=1/\nu$; $\alpha+h\delta=1$, $Q\mu=1-(\alpha+\mu\delta)$ $(\mu=0,1,\ldots,[\nu/2]-1)$ не целое.

Далее приводится еще аналогичная теорема. Сокращенное резюме автора.

8916. О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов. Кангро Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, № 37, 150—190 (рез. эст.)

Пусть A и B — соответственно нормальный и треугольный матричные методы суммирования рядов. Доказываются некоторые теоремы, с помощью которых получаются необходимые и достаточные условия для реализации следующих трех случаев.

1. Ряд $\Sigma u_n\theta^n$ $(|\theta|\leqslant 1)$ суммируется (абсолютно) методом B при всех рядах Σu_n, суммируемых (абсолютно) методом A, и

$$\lim_{\theta\to 1}B\{\sum u_n\theta^n\}=A\{\sum u_n\},$$

где $A\{\Sigma u_n\}$ — результат суммирования ряда Σu_n методом A.

II. Ряды $\sum\frac{u_n}{n+1}\theta^{n+1}$, $\sum nu_n\theta^{n-1}$ $(|\theta|\leqslant 1)$ суммируются (абсолютно) методом B при всех рядах Σu_n, суммируемых (абсолютно) методом A.

III. Ряд, являющийся произведением в смысле Коши двух рядов Σu_n и Σv_n, суммируется (абсолютно) методом B при всех рядах Σu_n, суммируемых (абсолютно) методом A.

Переходя от указанных A и B к более узкому классу методов — методам взвешенных средних Рисса, автор получает для них новые результаты, и в частности, следующие.

1. Пусть метод Рисса (R, q_n) (означающий, что последовательность частных сумм ряда преобразуется с помощью треугольной матрицы (a_{nk}), где $a_{nk} = q_k / Q_n$, $Q_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n$, причем все q_n и Q_n отличны от нуля) суммирует все абсолютно сходящиеся ряды. Тогда ряд $\Sigma u_n \theta^n$ ($|\theta| \leqslant 1$) суммируется методом (R, q_n) при всех рядах Σu_n, абсолютно суммируемых методом (R, p_n), тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{q_n P_n}{p_n Q_n}\theta^n\right| \leqslant M(\theta) \text{ и } \left|\frac{Q_n - Q_k}{Q_n}\frac{P_k}{p_k}\theta^k(1-\theta)\right| \leqslant N(\theta)$$

при $k \leqslant n$ (здесь и ниже $M(\theta)$ не зависит от n, а $N(\theta)$ — от n и k).

2. Пусть метод (R, q_n) суммирует все абсолютно сходящиеся ряды. Тогда ряд $\sum \frac{u_n}{n+1}\theta^{n+1}$ ($|\theta| \leqslant 1$) суммируется методом (R, q_n) при всех рядах Σu_n, абсолютно суммируемых методом (R, p_n), тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{q_n P_{n-1}}{p_{n-1} Q_n}\frac{\theta^n}{n}\right| \leqslant M(\theta) \text{ и}$$

$$\left|\frac{Q_n - Q_k}{Q_n}\frac{P_k}{p_k}\theta^{k+1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{\theta}{k+2}\right)\right| \leqslant N(\theta)$$

при $k \leqslant n-1$.

3. Пусть метод (R, p_n) удовлетворяет условиям:

$$\left|\frac{P_{n-k}}{p_{n-k}}\right| \leqslant M\left|\frac{P_n}{p_n}\right|,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-k-1}\left|P_\nu\left(\frac{p_{k+\nu}}{p_\nu} - \frac{p_{k+\nu+1}}{p_{\nu+1}}\right)\right| \leqslant N|P_n|,$$

где M и N не зависит от n и $k < n$.

Для того чтобы ряд Σw_n ($w_n = u_0 v_0 + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0$) суммировался методом (R, p_n) при всех абсолютно сходящихся рядах Σu_n, необходимо и достаточно, чтобы ряд Σv_n суммировался методом (R, p_n). В теоремах 8, 9, 12, 13 при формулировке одного из условий допущена неточность. Именно, вместо фразы: «в некоторой окрестности точки $\theta = 1$» следовало бы сказать: на пересечении некоторой окрестности точки $\theta = 1$ с областью $|\theta| < 1$. В. М. Даревский

8917. О множителях суммируемости. К а н г р о Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, № 37, 191—232 (рез. эст.)

Используется следующая терминология. Пусть $A = (a_{nk})$, $\mathfrak{A} = (a_{nk})$, B — некоторые матрицы. Ряд Σu_k называется A-суммируемым, $|A|$-суммируемым, A-ограниченным, если последовательность величин $U_n = \Sigma_k a_{nk} u_k$ является соответственно сходящейся, абсолютно сходящейся, ограниченной. Последовательность $\{s_k\}$ называется $\mathfrak{A}$-суммируемой, $|\mathfrak{A}|$-суммируемой, $\mathfrak{A}$-ограниченной, если последовательность величин $S_n = \Sigma_k a_{nk} s_k$ соответственно сходится, абсолютно сходится, ограничена.

Величины ε_k называются множителями суммируемости типа (A, B), типа $(|A|, B)$, типа (A_0, B), если ряд $\Sigma u_k \varepsilon_k$ суммируется методом B при всех соответственно A-суммируемых, $|A|$-суммируемых, A-ограниченных рядах Σu_k. Величины ε_k называются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$, типа $(|\mathfrak{A}|, B)$, типа $(\mathfrak{A}_0, B)$, если ряд $\Sigma s_k \varepsilon_k$ суммируется методом B при всех соответственно $\mathfrak{A}$-суммируемых, $|\mathfrak{A}|$-суммируемых, $\mathfrak{A}$-ограниченных последовательностях $\{s_k\}$. Если ряд $\Sigma u_k \varepsilon_k$ ($\Sigma s_k \varepsilon_k$) является $|B|$-суммируемым при всех $|A|$-суммируемых ($|\mathfrak{A}|$-суммируемых) рядах Σu_k (последовательностях $\{s_k\}$), то величины ε_k называются множителями суммируемости типа $(|A|, |B|)$ (типа $(|\mathfrak{A}|, |B|)$). Для множителей суммируемости каждого из указанных типов устанавливаются необходимые и достаточные условия в предположении, что матрицы A и $\mathfrak{A}$ реверсивные. Из этих условий выводятся более эффективные необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости указанных типов, когда A ($\mathfrak{A}$) есть метод P ($\mathfrak{P}$) взвешенных средних Рисса, рассматриваемый как метод суммирования рядов (последовательностей). При этом в большинстве случаев на методы P ($\mathfrak{P}$) и B накладываются некоторые ограничения. Доказанные автором для методов Рисса теоремы являются в основном развитием или обобщением результатов Юрката и Пейеримхоффа (W. Jurkat, A. Peyerimhoff, РЖМат, 1954, 2205). Среди этих теорем имеются следующие.

I. Пусть метод $\mathfrak{P}$ (определяемый треугольной матрицей с элементами $a_{nk} = p_k / P_n$ при условии, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ величины p_n и $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$ не равны нулю) сохраняет сходимость, а метод B корегулярен. Для того чтобы величины ε_k были бы множителями суммируемости типа $(\mathfrak{P}, B)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\sum_{k=0}^{\infty}\left|P_k\left(\frac{\varepsilon_k}{p_k} - \frac{\varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}}\right)\right| < \infty$,

2) существует $\lim_{k\to\infty} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}$

II. Пусть метод P (определяемый треугольной матрицей с элементами $a_{nk} = 1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}$ при вышеуказанных условиях для P_n и p_n и при $P_{-1} = 0$) сохраняет сходимость, а метод $B = (\beta_{nk})$ регулярен. Для того чтобы величины ε_k были бы множителями суммируемости типа (P, B), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\sum_{k=0}^{\infty}\left|P_k\left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{p_k} - \frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k+2}}{p_{k+1}}\right)\right| < \infty$,

2) $P_k(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) = O(p_k)$,

3) $\sum_{k=0}^{\infty}\left|P_k \varepsilon_{k+1}\left(\frac{\beta_{nk} - \beta_{nk+1}}{p_k} - \frac{\beta_{nk+1} - \beta_{nk+2}}{p_{k+1}}\right)\right| \leqslant M$,

4) $\left|\beta_{nk} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}\right| \leqslant M_n$

(M не зависит от n, а M_n — от k).

В конце статьи устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы B-сумма (результат суммирования методом B) ряда $\Sigma u_k \varepsilon_k(\theta)$ была бы непрерывной функцией θ в точке $\theta = \theta_0$ при всех A-суммируемых рядах Σu_k, и необходимые и достаточные условия для того, чтобы в точке $\theta = \theta_0$ указанная функция имела производную, равную B-сумме ряда $\Sigma u_k \varepsilon_k'(\theta_0)$ при всех A-суммируемых рядах Σu_k (метод A в обоих случаях предполагается реверсивным).

В. М. Даревский

8918. О множителях суммируемости абсолютно суммируемых методом Чезаро рядов. А н д е р с е н (On summability factors of absolutery C-summable

series. Andersen A. F.), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 1—4 (англ.)

Ряд $\Sigma_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ абсолютно суммируем методом Чезаро порядка r к s ($|C, r|$ суммируем к s), если $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^r = s$ и $\Sigma_{n=1}^{\infty}|\sigma_n^r - \sigma_{n-1}^r|$ сходится, где σ_n^r — n-е чезаровское среднее порядка r.

В работе намечено доказательство следующей теоремы: если последовательность ε_ν удовлетворяет условиям

$$1)\quad \varepsilon_\nu = O(\nu^{-\rho}),\quad 2)\quad \Delta^r\varepsilon_\nu = O(\nu^{-r}),$$

где r и ρ — произвольные числа, причем $0 \leqslant \rho \leqslant r$, то из суммируемости $\Sigma_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ методом $|C, r|$ вытекает суммируемость $\Sigma_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu u_\nu$ методом $|C, r-\rho|$.

Подробное доказательство автор предполагает опубликовать в Acta math. И. И. Огиевецкий

8919. Две теоремы типа Мерсера. Вучкович (Deux théorèmes de type Mercerien. Vučković Vladeta), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 53—58 (франц.)

Пусть s_n — частные суммы ряда $\Sigma_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, $\sigma_n = \Sigma_{\nu=0}^{n-1} a_\nu + c\cdot a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а (W, p_n) — средние Вороного. Устанавливается, что из $(W, p_n) - \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$ следует, что $(W, p_n) - \lim_{n\to\infty} s_n = \sigma$, только $R\{c\} > \frac{1}{2}$

Аналогичная теорема имеет место и для метода (A).

Примечание референта. Автор называет метод суммирования Вороного методом Нёрлунда.

К. М. Слепенчук

8920. Об одном методе суммирования несобственных интегралов. Кауфман Б. Л., Уч. зап. Чкаловского пед. ин-та, 1956, вып. 9, 47—54

Интеграл $\int_0^\infty f(t)\,dt$ суммируется методом (E, k) (методом Бернштейна k-го порядка), если

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_0^\infty \cos^k\frac{\pi t}{2x}\, f(t)\,dt\right) = s,\ k \text{ — целое.}$$

Доказывается, что из суммируемости $\int_0^\infty f(t)\,dt$ методом Чезаро (C, k) к s вытекает его суммируемость методом (E, k) к тому же числу. И. И. Огиевецкий

8921 К. Вычисление рядов. Салехов Г. С., Гостехиздат, 1955, 144 стр., илл., 3 р. 60 к.

В основу книги автор положил две его работы (Успехи матем. наук, 1949, 4, вып. 4 (32); Уч. зап. Казанск. ун-та, 1936, 96, кн. 4—5).

В книге пять глав и «Приложение». Пять страниц занимают «Краткие исторические сведения».

Гл. I — «Общая схема вычисления рядов с положительными членами» — содержит изложение вопросов сходимости, оценки остаточных членов и улучшения сходимости рядов (преобразование Куммера) методом сравнения двух рядов.

В гл. II — «Признаки сходимости рядов с положительными членами. Оценки остаточных членов»— приводятся признаки сходимости Даламбера, Коши, Куммера, Джиудичи, Раабе, Гаусса и др. Для каждого признака даются оценки остаточных членов, получаемые из общих оценок гл. I. Рассматриваются примеры.

В гл. III — «Способы улучшения сходимости рядов, соответствующие различным признакам сходимости» — показано, как можно поставить в соответствие признакам сходимости Даламбера, Гаусса и интегральному признаку Коши способы улучшения сходимости рядов. Получаются в общем уже описанные в литературе методы ускорения сходимости рядов, иллюстрируемые примерами.

Гл. IV — «Улучшение сходимости одного класса функциональных рядов» — посвящена вопросу ускорения сходимости рядов, разложенных по специальным функциям.

В гл. V — «Некоторые интегральные оценки и их приложения» — даны две схемы получения серии общих интегральных оценок для рядов и конечных сумм, получаемых из известной формулы Эйлера. Приведены примеры.

В «Приложении» — «Некоторые достаточные признаки сходимости двойных рядов. Оценки остаточных членов» — общая схема, данная в гл. I—III, распространяется на двойные ряды. Библ. 52 назв.

Я. И. Алихашкин

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

8922. Обобщение одной теоремы Штурма и ее приложение к функциям Бесселя и к многочленам Лежандра. Бихари (Egy Sturm-tétel általásnosìtása és alkalmazása Bessel-függvényekre és Legendre-polinomokra. Bihari Imre), Mat. lapok, 1955, 6, № 2—3 165—175 (венг.; рез. русс., англ.)

1. Пусть $A_1(x)$, $A_2(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ — непрерывные функции, $a \leqslant x \leqslant b$.

2. а) или $A_2(x) \geqslant A_1(x)$ и $B_2(x) \geqslant B_1(x)$, $a < x < b$, но $A_2(x) \not\equiv A_1(x)$; б) или $A_2(x) = A_1(x)$, $B_2(x) \geqslant B_1(x)$, $a < x < b$, а $B_2(x) \not\equiv B_1(x)$.

3. Пусть следующие пределы не отрицательны:

$$\lim_{x=a+0} y(x),\ \lim_{x=a+0} Y(x),\ \lim_{x=a+0} Y'(x),$$
$$\lim_{x=a+0}[y'(x)\,Y(x) - y(x)\,Y'(x)].$$

4. Пусть $y(x)$ и $Y(x)$ соответственно представляют собой решения следующих уравнений:

$y'' + A_1(x)\,y' + B_1(x)\,y = 0$, $Y'' + A_2(x)\,Y' + B_2(x)\,y = 0$.

Тогда отношение $y(x)/Y(x)$ — возрастающая функция от x в некоторой области, расположенной за максимумом функции $Y(x)$. В случае 2 б) это тоже имеет место для $a < x \leqslant b$ и, кроме того, если $\lim_{x=a+0} y(x)/Y(x) \geqslant 1$, то $y(x) > Y(x)$ на рассматриваемом интервале.

Исследуется обобщение указанной теоремы также в левую сторону от точки a, а далее на случай, когда $B_2 \equiv B_1 A_2 \geqslant A_1$, но $A_2 \not\equiv A_1$, и, наконец, на случай, когда порядок величины $B_2 - B_1$ около a меньше или равен порядку величины $A_2 - A_1$.

Далее даются некоторые приложения к функции Бесселя. Сокращенное резюме автора.

8923. Производная присоединенной функции Лежандра первого рода по ее порядку. Робэн (Dérivée de la fonction associée de Legendre de première espèce, par rapport à son degré. Robin Louis), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 1, 57—59 (франц.)

Как известно, для нецелых λ присоединенная функция Лежандра допускает представление

$$P_{\lambda,m}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-\lambda, \lambda+1, 1-m; \frac{1-x}{2}\right)$$

Устанавливается формула

$$\frac{\partial P_{\lambda,m}}{\partial\lambda} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+i+1)}{\Gamma(\lambda-i+1)} \frac{a_{\lambda,i}}{2^i i!} \frac{(x-1)^i}{\Gamma(i-m+1)},$$

где

$$a_{\lambda,i}=\frac{\Gamma'(\lambda+i+1)}{\Gamma(\lambda+i+1)}-\frac{\Gamma'(\lambda-i+1)}{\Gamma(\lambda-i+1)}.$$

Предельным переходом находится $\frac{\partial P_{\lambda,m}}{\partial\lambda}$ и для целых λ. Получены некоторые следствия, в частности новое представление гипергеометрической функции ${}_3F_2$.

И. П. Натансон

8924. **О шаровых функциях Гельмгольца и теореме сложения. Нодзава** (Helmholtz の體球函數とその加法定理について・野澤豊吉), 数性論研究, Бусэйрон кэнкю, 1954, № 78, 75—86 (япон.)

Шаровыми функциями Гельмгольца называются частные решения уравнения Гельмгольца:

$$J_n^m(\alpha\mathbf{r})=\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha r}}\,J_{n+\frac12}(\alpha r)\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi},$$

$$H_n^m(\alpha\mathbf{r})=\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha r}}\,H_{n+\frac12}^{(1)}(\alpha r)\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}.$$

Дифференцируя по $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$, можно вывести формулы:

$$J_n^m(\mathbf{r})=\left[i^n2^m\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m P_n^{(m)}\left(i\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\frac{\sin\gamma}{r}.$$

$$H_n^m(\mathbf{r})=\left[i^n2^m\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m P_n^{(m)}\left(t\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\frac{e^{i\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)}}{r}$$

С помощью этих формул получены:

1) Теорема сложения, представляющая $J_n^m(\mathbf{r})\,H_n^m(\mathbf{r})$ через функции $J_\rho^m(\mathbf{r}'),H_\rho^m(\mathbf{r}')$, относящиеся к другому началу координат;

2) Формула разложения, представляющая $\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha pp'}}\times$ $\times H_{\frac12}^{(1)}(\alpha pp')$ через шаровые функции Гельмгольца, относящиеся к двум началам координат. Ли Дя Гон

8925. **Обобщенная рациональная функция Чебышева. Шарп** (A general Tchebycheff rational function. Sharpe Charles B.), Proc. I. R. E., 1954, **42**, 454—457 (англ.)

См. РЖФиз, 1955, 14538

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

8926. **Применение интеграла Фурье в физике. Пейдж** (Applications of the Fourier integral in physical science. Page Chester H.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 3, 231—237 (англ.)

Рассматриваются некоторые свойства простых и кратных преобразований Фурье по времени и по пространственным координатам и их приложения в физике. Намечаются аналогии между диффракцией света из щели и квадрата и рассеянием рентгеновых лучей в кристалле — с одной стороны, и обычным, двухкратным, соответственно трехкратным преобразованиями Фурье — с другой стороны. Изучаются кратные преобразования Фурье в полярных, цилиндрических и сферических координатах; попутно получаются преобразования Фурье — Бесселя. Рассматривается интегрирование некоторых частных случаев дифференциального уравнения вида

$$-\nabla^2u+Au+B\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=f(x,y,z,t)$$

при помощи кратных преобразований Фурье. В частности, приводится интегрирование уравнения теплопроводности при помощи преобразований Фурье, ссылаясь при этом на книгу Снеддон И., Преобразования Фурье, Изд-во ин. лит., М., 1955. Н. А. Бразма

8927. **О порядке величины синус-трансформации Фурье. Боянич, Томич** (Sur l'ordre de grandeur de la transformée de sinus de Fourier. Bojanić R., Tomić M.), Publs Inst. math. Acad. serbe, sci., 1954, **7**, 41—46 (франц.)

Доказывается теорема: Пусть функция $f(x)$ положительна и стремится к нулю при $x\to\infty$, убывая, и пусть существует интеграл

$$F(t)=\int_0^\infty f(x)\sin tx\,dx.$$

Если для некоторого k, $0<k<2$, при $x\to\infty$ $x^kf(x)$ стремится, возрастая, к бесконечности, то для достаточно малых t имеют место неравенства

$$0<At^{-1}f(t^{-1})\leqslant F(t)\leqslant Bt^{-1}f(t^{-1}).$$

Если при этих условиях существует такое α, $0<\alpha<k<2$, что $x^\alpha f(x)$ стремится к нулю, убывая, то вышеуказанные неравенства имеют место для каждого t.

Л. Я. Цлаф

8928. **Об интегральных преобразованиях. Ковол-ли** (On integral transforms. Conolly B. W.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, **10**, № 3, 125—128 (англ.)

Исходя из идеи, лежащей в основе преобразования Эфроса, автор указывает формальный метод решения интегрального уравнения

$$f(s)=\int_\alpha^\beta g(s,t)\,i(t)\,dt$$

в предположении, что известны проеобразования (например, Лапласа или Фурье) функции $f(s)$ и функции $g(s,t)$, причем последнее имеет вид

$$G(u,t)\equiv\lambda(u)\,k\{\mu(u),t\}.$$

Приводятся примеры. Л. Я. Цлаф

8929. **Обобщение преобразования Пуассона. Стандиш** (A generalization of the Poisson transform. Standish Charles), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 6, 942—949 (англ.)

Рассматриваются преобразования

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int\frac{A(z-t)+B}{(z-t)^2+C^2}\,d\alpha(t),\qquad(1)$$

где $\alpha(t)$ — функция ограниченной вариации в каждом конечном интервале, и

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int\frac{A(z-t)+B}{(z-t)^2+C^2}\,\varphi(t)\,dt,\qquad(2)$$

где $\varphi(t)$ интегрируема по Лебегу в каждом конечном интервале. Знак интеграла понимается в смысле $\lim_{R\to\infty,\,S\to\infty}\int_{-S}^{R}$. Для указанных преобразований выводятся формулы обращения. Для (1) обращением является формула

$$\lim_{t\to1}\int_0^x Ge^{|tCH|}h(u)\,du=\frac12[\alpha(x+0)+\alpha(x-0)-$$
$$-(\alpha(0+)+\alpha(0-))]-AGKx\qquad(3)$$

для каждого x.

Для (2) обращение дается формулой

$$\lim_{t\to 1} Ge^{|tCH|}\, h(x) = \varphi(x) - AGK \qquad (4)$$

для почти всех x.

Здесь $G = C^2 (B^2 + C^2A^2)^{-1}$, $H = (1/i)\, D$,

$$e^{|tCH|} f(x) \cos CtDf(x) + D^{-1} \sin CtD\hat{f}(x),\ \cos CtDf(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (Ct)^{2K}}{(2K)!} f(x)^{(2K)},\ D^{-1} \sin CtD\hat{f}(x) =$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K (Ct)^{2K+1}}{(2K+1)!} \hat{f}(x)^{(2K)},$$

$$\hat{f}(x) = -\pi^{-1} \int_0^{\infty} u^{-2} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]\, du,$$

$$h(x) = -A \int_0^x \hat{f}(u)\, du + B\, |C|^{-1} f(x),$$

$$K = -2\, (A^2G \log 4)^{-1} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\lambda}^{2\lambda} \frac{-At+B}{C^2+t^2}\, d\alpha^{\#}(t),$$

где $\alpha^{\#}(x)$ обозначает левую сторону (3).

Для почти всех x формула (2) обращается также в виде

$$\lim_{t\to 1} Ge^{|tHC|}\, h(x) = \lim_{t\to 1} 2^{-1} [h(x+iCt) + h(x-iCt)] +$$

$$+ \lim_{t\to 1} 2^{-1} [h^{\flat}(x+iCt) + h^{\flat}(x-iCt)] = \varphi(x) - AK,$$

где

$$h^{\flat}(x) = \int^x h(u)\, du.$$

Л. Я. Цлаф

8930. Некоторые теоремы о двойственных себе соотношениях в операционном исчислении. I. Б о с (Certain theorems on selfreciprocal relationship in operational calculus. I. B o s e B. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 3, 141—152 (англ.)

Обозначим символом $\varphi(p) \subset f(t)$ или $f(t) \supset \varphi(p)$ преобразование Лапласа $\varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$, а через R_ν пространство, образуемое двойственными себе функциями преобразования Ханкеля порядка ν, т. е функциями $\varphi(x)$, удовлетворяющими уравнению $\int_0^{\infty} (px)^{1/2} \times J_\nu(px)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(p)$, $\nu > -1$, причем $R_{-1/2} = R_c$; $R_{1/2} = R_s$.

1. Если $x^{\nu+1/2} f(x)$ непрерывна в промежутке $(0, X)$ и если сходится интеграл $\int_1^{\infty} |f(x)|\, dx$, $f^{(r)}(0) = 0$ при $r = 0, 1, \ldots, n-1$, то из принадлежности $f(x)$ пространству $R_{\nu+1}$ вытекает принадлежность $\varphi(x)$ пространству R_ν и наоборот.

2. При $k = 1, 2$ и выполнении перечисленных условий из принадлежности $f_k(x)$ пространству R_ν вытекает принадлежность $\psi_k(x)$ пространству $R_{\nu+1}$ и наоборот.

Далее дается применение этих результатов к теории E-функций. E-функции Мак Роберта $E(\alpha, \beta; x) = \Gamma(\alpha) \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{\beta-1} \left(1 + \frac{\lambda}{x}\right)^{-\alpha} d\lambda$ при некоторых специальных предположениях относительно $\beta > 0$.

Пользуясь этими свойствами E-функций и применяя теоремы 1 и 2, автор получает следующие конкретные результаты: $x^{1/2} e^{-x^2/2}$ принадлежит R_0; $xe^{-x^2/2} - R_s$; $e^{-x^2/2} - R_c$; $x^2 e^{-x^2/2} - R_{s/2}$; $(3x^2 - x^4)\, e^{-x^2/2} - R_c$; $x^{3/2} \times e^{-x^2/2} - R_1$.

Кроме того, применяя теорему Гольдштейна о том, что из операционных соотношений $\varphi(p) \subset f(t)$, $\psi(p) \subset g(t)$ вытекает равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)\, g(t)\, dt}{t} = \int_0^{\infty} \frac{f(t)\, \psi(t)\, dt}{t},$$

автор находит с помощью теоремы 2, что функция $x^{1/2} J_{-1/4}(x^2/2)$ принадлежит R_c. Ю. Л. Рабинович

8931. Несколько теорем операционного исчисления. II. Ч а к (Some theorems in operational calculus. II. C h a k A. M.), Ann. Univ. Lyon, 1954, Ser. 3A, № 17, 11—17 (англ.)

О п р е д е л е н и е. Функция $f(t)$ принадлежит к классу T_g, если $f(t) = \int_0^{\infty} g(xt) f(x)\, dx$. В частности, функция $g(t)$ принадлежит к классу H_{m+1}, если $g(t) = \int_0^{\infty} J_{m+1}(2\sqrt{xt})\, g(x)\, dx$. Пусть $\varphi(p) \subset f(t)$ — символическая запись преобразования Лапласа—Карсона. Доказываются следующие теоремы:

Т е о р е м а I. Если $t^{-(m+1)/2} f(t)$ из T_g, $g(t)$ из H_{m+1}, то $t^{(m-1)/2} \varphi(t)$ из T_g.

Далее, если $\varphi(x) = \int_0^{\infty} g(xt) f(t)\, dt$, то будем писать $f(t) \underset{g}{=} \varphi(x)$.

Т е о р е м а II. Если $t^{-(m+1)/2} f(t) \underset{g}{=} h(x)\, x^{-(m+1)/2}$; $\varphi(p) \subset f(t)$ и $\theta(p) \subset h(t)$, то $\varphi(t)\, t^{(m-1)/2} \underset{g}{=} \theta(x)\, x^{(m-1)/2}$.

В теореме III обобщается теорема I на случай функций n переменных.

Т е о р е м а IV. Если $f_1(p) \subset f_2(t)$, $\frac{1}{p^m} f_2(p) \subset f_3(t), \ldots, \frac{1}{p^m} f_{\nu-1}(p) \subset f_\nu(t)$ и, кроме того, $t^{(m-1)/2} f_1(t)$ из T_g, $g(t)$ из H_{m+1}, то $f_\nu(t)\, t^{-(m+1)/2}$ из T_g. Затем вводится в рассмотрение функция Бесселя—Майтленда

$$J_\nu^\lambda(x) = \Sigma_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{m!\, \Gamma(\nu + \lambda m + 1)},$$

с помощью которой конструируется функция

$$A(t) = \int_0^{\infty} (st)^{\nu/2} J_\nu^\lambda(st^\lambda)\, B(s)\, ds.$$

Если $A(t) = B(t)$, будем говорить, что $A(t)$ принадлежит к классу H_ν^λ. При $\lambda = 1$ мы получим функции класса H_ν. В заключение приводится обобщение теоремы I:

Т е о р е м а V. Если $\varphi(p) \supset f(t)$ и $g(t)$ из H_ν^λ, то

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t^{\nu/\lambda}}\, g(xt^{1/\gamma})\, dt$$

обусловливает

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^{\nu-\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{g(p^\lambda t)}{t}\, \varphi(t)\, dt$$

и обратно. А. П. Прудников

8932. О преобразованиях Лапласа некоторых распределений. Лавуан (Sur les transformées de Laplace de certaines distributions. Lavoine Jean), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 6, 717—719 (франц.)

Автор называет преобразованием Лапласа от функции $f(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ (вообще говоря, локально не интегрируемой) конечную по Адамару часть интеграла $\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt$. Приводится таблица преобразований Лапласа для ряда элементарных функций, а также для функций, связанных с бесселевыми. В качестве примера решается уравнение

$$\frac{1}{n+1}\varphi''(x) - \varphi'(x) = \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}}; \quad x > 0.$$

Г. Е. Шилов

8933 К. Справочная книга по преобразованию Лапласа. Т. 2. Приложения преобразования Лапласа. Ч. 1. Дёч (Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. 2. Anwendungen der Laplace Transformation. I. Abt. Doetsch Gustav. Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1955, 436 S., ill., 26, 15 DM) (нем.)

Книга является вторым томом большого справочного труда, рассчитанного на три тома. Первый том, содержащий подробно изложенную теорию преобразования Лапласа, вышел в 1950 г. Реферируемая первая часть второго тома посвящена математическим приложениям, в первую очередь недостаточно широко известным, как отмечает автор, асимптотическим разложениям. Во введении рассматривается отображение основных операций над функциями при помощи преобразования Лапласа и его обращения (линейные подстановки, дифференцирование, интегрирование и т. д. функций-оригиналов и функций-изображений). Далее следует исчерпывающее рассмотрение следующих трех групп вопросов: асимптотические разложения, сходящиеся разложения и обыкновенные дифференциальные уравнения.

Рассмотрение асимптотических разложений включает общие соображения по поводу асимптотики, абелеву асимптотику одностороннего преобразования Лапласа, абелеву асимптотику двустороннего преобразования Лапласа и преобразования Меллина, абелеву асимптотику комплексного интеграла обращения как в случае однозначных функций-изображений, так и при наличии у них алгебраических и логарифмических особенностей, тауберову асимптотику преобразования Лапласа и, наконец, ряд разрозненных фактов, относящихся к асимптотическому поведению функций-оригиналов и их изображений. В разделе сходящихся разложений подробно рассматриваются факториальные ряды и их связь с преобразованием Лапласа и с асимптотическими разложениями, а также приложения преобразования Лапласа к теории специальных функций (вывод формул преобразования тэта-функций, разложения в ряды по функциям Бесселя, разложения полиномов Лаггера и вырожденной (конфлуэнтной) гипергеометрической функции в ряды по функциям Бесселя, разложения в ряды по полиномам Лагерра и Эрмита и т. п.). В последнем разделе рассматриваются приложения преобразования Лапласа к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, с постоянными и переменными коэффициентами на полуоси и на всей оси. Здесь, наряду с общими теоретическими вопросами, рассматриваются также и некоторые прикладные задачи: электрический колебательный контур, системы с обратной связью, вопросы теории регулирования, фильтры и т. д.

Книга отличается тщательностью и полнотой изложения. В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

8934. Линейные системы. Гросс (Lineare systeme. Gross B.), Nuovo cimento, 1956, **3**, Suppl. № 2, 235—296 (нем.)

Рассуждения о свойствах характеристических функций линейных электрических цепей, основанные на известной формуле предельных значений интеграла типа Коши из теории функций комплексного переменного. Эти предельные значения рассматриваются на мнимой оси плоскости комплексного переменного $z = \beta + i\omega$ (ω означает круговую частоту колебаний), так что указанным значениям с $\beta = 0$ соответствуют незатухающие синусоидальные колебания (имеются в виду цепи без активных сопротивлений как предельные случаи реальных цепей).

При помощи изложенного в работе формального аппарата, использующего, кроме предельных значений аналитических функций комплексного переменного, также импульсную δ-функцию и ее производную δ', рассматриваются соотношения между комплексными характеристиками $Y(z)$, $Z(z)$ установившихся процессов, с одной стороны, и переходными процессами $i(t)$, $u(t)$ при приложенных к цепям с момента $t = 0$ единичных возмущениях, с другой стороны. Рассматриваются примеры. В частности, по входной комплексной проводимости однородной, замкнутой в конце накоротко телеграфной линии без потерь получено выражение входного тока линии; приведено и обратное преобразование. Н. А. Бразма

8935. Напряжение и ток в пупинизированной рассеивающей линии. Де-Шварц (Tensioni e correnti in una linea pupinizzata dissipativa. De Schwarz M. J.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **40**, 349—364 (итал.)

Методом преобразования Лапласа определяется напряжение и ток в виде функций времени внутри катушек пупинизированной рассеивающей линии. Рассматриваются случаи линий конечной и бесконечной длины. В выкладках автор опирается на ранние результаты Америо (Amerio L., Comment. Pont. Acad. Scient., 1940, **4**, № 3, 83—145). Н. А. Бразма

8936. Напряжение и сила тока в проводнике Пупина. Де-Шварц (Spannung und Stromstärke in einer Pupinleitung. De Schwarz M. J.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, № 9—10, 336—338 (нем.)

Речь идет о линии с распределенными постоянными, в которую на равных расстояниях включены сосредоточенные индуктивности (катушки Пупина, югославского электротехника). Рассматриваются преобразования Лапласа напряжения и тока в цепи N четырехполюсников, причем по результатам Америо (Amerio L., Comm. Pont. Acad. Scient., 1940, **4**, № 3, 83—145)

$$\frac{u_{N,k}}{u_{N,0}} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N-1} \frac{\sin\frac{m\pi}{N}\sin\frac{km\pi}{N}}{A - \cos\frac{m\pi}{N}} = F_{N,k}(p), \quad k = 1,2,\ldots,N,$$

где $u_{N,k}$ — преобразование Лапласа напряжения на входе $(k+1)$-го или на выходе k-го четырехполюсника, а

$$A = A(p) = \operatorname{ch}\zeta(p) + pLs(g + cp)\operatorname{sh}\zeta(p)/\zeta(p),$$

где $\zeta(p) = \sqrt{(r + lp)(g + cp)}\, s$, r, l, g и c — распределенные постоянные, $2L$ — сосредоточенная индуктивность, s — число катушек. В общем случае $r \neq 0$ или $g \neq 0$ определение начальной функции $F_{N,k}(p)$ представляет трудности вследствие неабсолютной сходимости ряда вычетов. Автор приводит без доказательства

некоторые соображения, позволяющие обойти эти трудности. В. И. Левин

8937. Некоторые численные оценки распространения теплоты в области, ограниченной изнутри круговым цилиндром. Гольденберг (Some numerical evaluations of heat flow in the region bounded internally by a circular cylinder. Goldenberg H.), Proc. Phys. Soc., 1956, **B69**, № 2, 259—260 (англ.)

Рассматривается задача о распространении теплоты в бесконечной области, ограниченной изнутри круговым цилиндром $r = a$, когда цилиндрическая поверхность содержится при постоянной температуре V и в начальный момент $t = 0$ температура вне поверхности равна нулю. Температура v, как известно, дается формулой

$$v(r, t) = V + \frac{2V}{\pi}\int_0^\infty \exp(-Du^2t) \times$$

$$\times \frac{[J_0(ur)\,Y_0(ua) - Y_0(ur)\,J_0(ua)]}{J_0^2(au) - Y_0^2(au)}\,\frac{du}{u}, \qquad (1)$$

где D — коэффициент термической диффузии.

Автор ставит себе задачу — избавиться от бесконечной области интегрирования и получает приближенную формулу

$$\frac{v(r, t)}{V} = 1 - A\frac{2}{\pi} I(0, 1; T) - \frac{2}{\pi}\int_{y_2}^{y_1} \exp(-y^2T) \times$$

$$\times \frac{[J_0(y)\,Y_0(\lambda y) - Y_0(y)\,J_0(\lambda y) - A]}{J_0^2(y) + Y_0^2(y)}\,\frac{dy}{y}, \qquad (2)$$

где $I(0, 1; T) = \int_0^\infty \exp(-u^2T)\,\frac{du}{u[J_0^2(u) + Y_0^2(u)]}$, $T = Dt/a^2$.

Функция $I(0, 1; T)$ была табулирована Егером и Кларком для $T = 0{,}01$; 1; 10; 100; 1000. y_1 выбирается так, чтобы область интегрирования в (1) от 0 до ∞ можно было заменить областью от 0 до y_1 и для $0 \leqslant y \leqslant y_2$ можно было положить

$$J_0(y)\,Y_0(\lambda y) - Y_0(y)\,J_0(\lambda y) = A,\ \lambda = r/a.$$

Правая часть (2) подсчитана для $r = 2a$, $r = 10a$ и $r = 100a$ для большого ряда значений безразмерного параметра T, и подсчет представлен на графике.

Автор указывает, что он продолжил табулирование для $I(0,1; T)$ за $T = 1000$. Результаты численного подсчета для потока теплоты через единицу поверхности за время от 0 до t он представил графически для широкого ряда значений T А. К. Никитин

8938 К. Введение в теорию динамического программирования. Белман (An introduction to the theory of dynamic programming. Bellman Richard. The Rand Corporation, Santa Monica, Calif., 1953, X + 99 pp.) (англ.)

Автор начинает с перечисления нескольких проблем, которые могут быть исследованы с помощью решения функционального уравнения вида

$$f(p) = \max_k T_k f(p), \qquad (1)$$

где $f(p)$ — вещественная функция, определенная в пространстве P, и каждое T_k есть оператор, отображающий функции из P в функции из P. Вообще говоря, (1) возникает при следующих обстоятельствах. Имеется система, ряд состояний которой есть P, и ряд K операций k, каждая из которых, примененная к системе, переводит начальное состояние в новое в соответствии с определенным законом (детерминированным или вероятностным).

Последовательность операций, применяемых друг за другом, определяет последовательность состояний, и таким образом оказываются связанными каждая возможная пара последовательностей этих величин.

Задача состоит в определении последовательностей, отвечающих наибольшей величине; если $f(p)$ есть величина наилучшей возможной последовательности, начальное состояние которой есть P, а $T_k f(p)$ есть величина наилучшей возможной последовательности при условии, что, кроме того, начальная операция есть k, то $f(p)$ удовлетворяет (1). Следует отметить, что оператор T_k обычно простого типа.

Во второй главе доказаны теоремы единственности и существования для специальных случаев (1). В следующих главах более подробно изучаются решения для особых случаев (1), соответствующих определенным частным задачам

Типичная постановка задачи такова: «Известно, что частица может находиться в состоянии либо 0, либо 1 и дана предварительно вероятность x того, что она находится в состоянии 1. Применение операции A уменьшает эту вероятность до ax, где a — положительная величина, меньшая 1, с другой стороны, операция, которая состоит в наблюдении частицы, указывает, в каком состоянии она находится. Если требуется перевести частицу в состояние 0 в минимальное время, то каков наилучший процесс?» Если $f(x)$ — ожидаемое время, связанное с оптимальным процессом, то для этой задачи

$$f(x) = \min[1 + xf(1),\ 1 + f(ax)],\ x > 0,\ f(0) = 0. \qquad (2)$$

Одна из теорем существования и единственности утверждает, что (2) имеет единственное, положительное, ограниченное решение. Это решение дается при $f(1) = \min_{k=1,2,\ldots}(k + 1)/(1 - a^k)$ и записывается:

$$f(x) = 1 + xf(1), \text{ при } x \leq x_0$$

$$f(x) = (N + 1) + a^N xf(1), \text{ при } ax_0 \leq a^N x \leq x_0,$$

$$N = 1, 2, \ldots$$

где $x_0 = [(1 - a)f(1)]^{-1}$. D. Blackwell

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 887

См. также: 8718, 8719, 8762, 8826, 8830, 8836, 8845, 8851, 8852, 8863, 8990, 9120, 9136, 9151 К

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

8939. Об одной теореме Ф. Рисса. Маркус А. С., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1955, 17, 73—76

Пусть B — линейный замкнутый нормально разрешимый оператор, действующий в банаховом пространстве E, и число линейно независимых решений уравнения $Bx = 0$ конечно. Отмечается, что в этом случае множество R элементов y, при которых все уравнения $B^n x = y$ ($n = 1,2,\ldots$) разрешимы, есть замкнутое подпространство в E. Пусть все линейно независимые нульэлементы оператора B расположены в виде таблицы, состоящей из конечных и бесконечных строк, как это сделано референтом (РЖМат, 1955, 3845), и L означает подпространство, образованное нульэлементами конечных строк. сказывает, что До E равно прямой

сумме L и R в том и только в том случае, когда сопряженный оператор $\overline{B}$ имеет конечное число линейно независимых нульэлементов. С. Н. Крачковский

8940. Некоторые замечания об обращении линейных непрерывных отображений векторных топологических пространств. П а в е л (Unele observaţii asupra inversării aplicaţiilor liniare şi continue în spaţii vectoriale topologice. P a v e l M o n i c a), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 11, 1569—1572 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть E и F — векторные топологические пространства, u — линейное непрерывное отображение E на F. Указываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы u было обратимо справа. Отмечается частный случай, когда E и F метризуемы. Результаты автора являются непосредственными следствиями известных теорем (Bourbaki N., Espaces vectoriels topologiques, 1953, §§ 1, 2). С. Н. Крачковский

8941. Об ограниченных линейных преобразованиях в банаховых пространствах. М е ш к о в с к и й (Über beschränkte lineare Transformationen in Banachschen Räumen. M e s c h k o w s k i H e r b e r t), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, A1, № 214, 14 S. (нем.)

Рассматриваются линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве. Пусть $\sigma(T)$ — спектр оператора T; $\mathfrak{G}$ — область комплексной плоскости z, содержащая $\sigma(T)$, с кусочно-аналитической границей $\mathfrak{C}$. Известно, что если $\log z$ однозначен в $\mathfrak{G}$, то можно определить степени оператора T (с произвольным комплексным показателем a) по формуле $T^a = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} z^a R_z dz$, где $R_z = (T - zI)^{-1}$. При этом $T^0 = I$, $T^1 = T$, $T^a T^b = T^{a+b}$.

1. Пусть мнимая ось и прямые $\operatorname{Re} z = \pm \operatorname{Im} z$ не пересекают $\sigma(T)$. Взяв $\mathfrak{G}$ в виде круга $|z| < r\,(r > \|T\|)$ с разрезом от 0 до ri, будем иметь $(T^2)^{1/2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} z^{1/2}(T^2 - zI)^{-1}dz$. Доказывается, что $(T^2)^{1/2} = P_1 T - P_2 T$, где $P_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{G}_\nu} R_z dz$, причем $\mathfrak{G}_\nu$ — граница полукруга $\|z\| < r$, $(-1)^\nu \operatorname{Re} z < 0\,(\nu = 1,2)$. Как следствие отсюда получается, что интегральное выражение $T^{1/2}$ не является, вообще говоря, единственным оператором, квадрат которого равен T.

2. Доказывается, что если $a \notin \sigma(T)$, то $\sigma(T)$ лежит в кольце $\rho \leqslant |z - a| \leqslant r$, где $\rho = (\lim_{n\to\infty} \|(T - aI)^{-n}\|^{1/n})^{-1}$, $r = \lim_{n\to\infty} \|(T - aI)^n\|^{1/n}$. При этом на каждой из окружностей $|z - a| = \rho$ и $|z - a| = r$ имеется, по крайней мере, одна точка спектра. Отмечаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы $\sigma(T)$ лежал на окружности, на вещественной оси и, вообще, на любой простой замкнутой аналитической линии.

3. Пусть $TS = ST$, $0 \notin \sigma(T)$, $\|T^{-1}\|\,\|S\| = q < 1$. Тогда $\rho_{T+S} \geqslant \rho_T(1 - q)$, где ρ_T и ρ_{T+S} — соответственно расстояния от точки $z = 0$ до $\sigma(T)$ и $\sigma(T + S)$. Отсюда выводится, что если $T(\varepsilon) = T + S(\varepsilon)$, $S(\varepsilon) = \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \ldots$, $\|T_\nu\| < MR^{-\nu}$, $R > 1$, $M > 0$, то $\rho_{T(\varepsilon)} \geqslant \rho_T\left(1 - \frac{\|T^{-1}\|\,M\varepsilon}{R - \varepsilon}\right)$. С. Н. Крачковский

8942. О формуле Лагранжа в пространствах Банаха. М а р и н е с к у (Asupra formulei lui Lagrange in spaţiile Banach. M a r i n e s c u G.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1954, № 4—5, 71—72 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть $T(x)$ — операция из банахова пространства E в пространство F, двойственное к некоторому пространству $G\,(F = G^*)$, и $L(E, F)$ — пространство линейных операторов из E в F. Доказывается, что обобщенная формула Лагранжа, данная в работе референта (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4, 78), сохраняется и для операций T. При помощи этого факта и ранее установленных автором предложений (РЖМат, 1956, 574) доказывается следующая теорема, дающая простые условия для того, чтобы дифференциал по Гато $\delta T(x_0, h)$ в точке x_0 был и дифференциалом по Фреше $dT(x_0, h)$: Если производная по Гато T' непрерывна в точке x_0 (в смысле топологии в $L(E, F)$), то $dT(x_0, h) = \delta T(x_0, h)$.

Эта теорема является обобщением теоремы 2.3, содержащейся в указанной выше работе референта.

М. М. Вайнберг

8943. Условия (в терминах «обобщенной производной») существования локального экстремума функционала. Ф р е ш е (Conditions d'existence (exprimées en termes de «variations généralisées») d'un extremum local d'une fonctionelle. F r é c h e t M a u r i c e), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 25, 1901—1904 (франц.)

Излагаются необходимые и достаточные условия существования локального экстремума функционала $F[z]$, зависящего от элемента z из банахова пространства. Функционал $F[z]$ имеет обобщенную производную n-го порядка в точке y, если существуют функционалы $F_1, F_2, \ldots, F_n$, не зависящие от действительного числа t, такие, что

$$F[y + tu] = F[y] + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} F_k[y, u] + t^n \mathcal{E}_n[y, u, t],$$

где u — произвольно фиксированный элемент банахова пространства и

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{E}_n[y, u, t] = 0. \qquad (1)$$

$F_n[y, u]$ называется «обобщенной производной» n-го порядка функционала $F[z]$ в точке $z = y$ при приращении u и обозначается через $\delta_u^n F[y]$. Если $F[z]$ имеет первую обобщенную производную при $z = y$, то для существования локального экстремума $F[z]$ при $z = y$ необходимо, чтобы $\delta_{\Delta y} F[y] = 0$ для любого Δy из банахова пространства.

Пусть $F[z]$ обладает обобщенной производной n-го порядка при $z = y$, а все его обобщенные производные порядка ниже n равны нулю при $z = y$ и произвольном Δy. Тогда для существования локального минимума (максимума) $F[z]$ при $z = y$ необходимо, чтобы для произвольного Δy в случае нечетного n выполнялось условие $\delta^n_{(\Delta y)^n} F[y] = 0$, а в случае четного n — условие $\delta^n_{(\Delta y)^n} F[y] \geqslant 0\ [\leqslant 0]$.

По определению, обобщенная производная n-го порядка функционала $F[z]$ при $z = y$ обладает свойством P, если в (1) $\mathcal{E}_n[y, u, t] \to 0$ при $t[y, u, t] \to 0$ равномерно для всех u с $\|u\| = 1$.

Пусть $m_n[y]$ и $M_n[y]$ — соответственно нижняя и верхняя грани $\delta_u^n F[y]$ для всех u с $\|u\| = 1$

Пусть $F[y]$ имеет обобщенную производную n-го порядка, обладающую свойством P, и $\delta_u F[y] = \ldots = \delta_u^{n-1} F[y] = 0$ для всех u. Тогда для существования локального минимума (максимума) $F[z]$ при $z = y$ достаточны условия: n — четное, $m_n[y] > 0$ $(M_n[y] < 0)$.

Обобщенная производная n-го порядка функционала $F[z]$ при $z=y$ обладает свойством Q, если: 1) $F[z]$ обладает обобщенной производной n-го порядка при $z=y$ и в некоторой окрестности y, 2) справедливо равенство

$$\Delta F[y]=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\,\delta^k_{(\Delta y)^k}F[y]+\frac{1}{n!}\,\delta^n_{(\Delta y)^n}F[y+\theta\Delta y],\ 0<\theta<1.$$

Если $F[z]$ при $z=y$ имеет обобщенную производную n-го порядка, обладающую свойством Q, а все его обобщенные производные ниже порядка n при $z=y$ равны нулю для любого Δy, то для существования локального минимума (максимума) $F[z]$ при $z=y$ достаточны условия: n — четное число, $\delta^n_{(\Delta y)^n}F[z]\geqslant 0$ [$\leqslant 0$] для любого Δz и любого z из некоторой окрестности y. Э. С. Цитланадзе

8944. О теореме Хеллингера — Хана. Ито (Hellinger-Hahk の定理について. 伊藤清三), 數學, (Sugaku), 1953, 5, № 2, 90—91 (япон.)

Теорема, указанная в заглавии,— это теорема 7.5 в книге Стоуна «Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis». Ее доказательство там сложно и длинно. Формулировки системы унитарных инвариантов, отличные от данной Стоуном, унифицированы и улучшены Фридрихсом и Веккеном.

Но, как известно референту, упрощения доказательства этой теоремы, на которой основывается нахождение системы унитарных инвариантов, до сих пор не приводились. Автор следует обозначениям книги Стоуна. Его доказательство просто и может быть резюмировано следующим образом.

Вначале находятся такие элементы $X_1, X_2, \ldots$ в $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M}(X_n)$, $n=1,2,\ldots$, попарно ортогональны, $\|X_n\|=1$, $\mathfrak{H}=\Sigma_{n=1}^{\infty}\oplus\mathfrak{M}(X_n)$. Затем вводятся $X_0=\Sigma_{n=1}^{\infty}X_n/2^{n|2}$ и $\rho_n(\Lambda)=\|E(\Lambda)X_n\|^2$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Очевидно, что $\rho_k\prec\rho_0$ $(k=1,2,\ldots)$, именно, $\rho_n(\Lambda)=\int_\Lambda\varphi_k(\lambda)\,d\rho_0(\lambda)$, $n=1,2,\ldots$ Множество $\Delta_n=\{\lambda\mid\varphi_n(\lambda)\neq 0\}$ разлагается на подмножества $\Delta_{1n},\ldots,\Delta_{nn}$ без общих точек. Затем вводятся $Y_m=\Sigma_{n=m}^{\infty}E(\Delta_{mn})X_n/n$, $m=1,2,\ldots$ Эти Y_m будут требуемыми: 1) $\mathfrak{M}(Y_m)$ попарно ортогональны, $\mathfrak{H}=\Sigma_{m=1}^{\infty}\oplus\mathfrak{M}(Y_m)$; 2) $\sigma_n(\Lambda)=\|E(\Lambda)Y_n\|^2$, $\sigma_{n+1}\prec\sigma_n$. Точечный спектр не рассматривается, и разложение единицы несколько общее, чем у Лорха (Lorch E. R., Trans. Amer. Math. Soc., 1939, 42) и Амброзе (Ambrose W., Duke Math. J., 1944, 11). Но это несущественно. Имеются две опечатки: в конце доказательства вместо $\psi_m(\lambda)=0$ должно быть $\psi_{m+1}(\lambda)=0$, а вместо $\lambda\in\bigcup_{n=m}^{\infty}\Delta_{mn}$ должно быть $\lambda\notin\bigcup_{n}^{\infty}{}_{m}\Delta_{mn}$. (Библиографическое описание статьи см. РЖМат, 1956, 6692).

8945. По поводу метода Ритца. Михлин С. Г., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 3, 391—394

Уравнение $Au=f$ в гильбертовом пространстве H имеет единственное решение u_0, если A — положительно определенный самосопряженный оператор. Вводя в $D(A)$ новую норму $\|u\|_A=(Au,u)$ и пополняя по этой норме $D(A)$, получим новое пространство H_A. Если $\{\varphi_n\}$ — полная система в H_A и u_n — полученное по методу Ритца приближенное решение исходного уравнения, то $\|u_n-u_0\|\to 0$ и $\|\sqrt{A}u_n-\sqrt{A}u_0\|\to 0$. Если A неограничен, то, вообще говоря, $\|Au_n-Au_0\|\not\to 0$. Исследуется вопрос о возможности такого выбора координатных функций $\{\varphi_n\}$, чтобы $\|Au_n-Au_0\|\to 0$. Для этого вводится следующее понятие: неограниченные самосопряженные положительно определенные операторы A и B называются сходными, если $D(A)=D(B)$ и $D(\sqrt{A})=D(\sqrt{B})$. Отсюда следует, что пространства H_A и H_B совпадают и нормы в них эквивалентны. В качестве координатных функций $\{\varphi_n\}$ берется полная система собственных функций сходного с A оператора B с дискретным спектром. Для доказательства того, что $Au_n\to Au_0$ (или, что то же, $Bu_n\to Bu_0$) система уравнений метода Ритца легко приводится к другой системе, совпадающей с приближенными уравнениями обобщения метода Галеркина, предложенного Г. И. Петровым. Доказывается, что в данном случае выполняется условие сходимости этого метода, установленное референтом (Докл. АН СССР, 1952, 86, № 3, 469—472), и, следовательно, при указанном выборе координатных функций $\|Au_n-Au_0\|\to 0$. Н. И. Польский

8946. Задачи Грина и Неймана для дифференциальных форм на римановых многообразиях. Коннер (The Green's and Neumann's problems for differential forms on Riemannian manifolds. Conner P. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 12, 1151—1155 (англ.)

Автор продолжает исследования Спенсера (см., например, РЖМат, 1953, 1252) дифференциальных форм на римановых многообразиях. Пусть R — n-мерное ориентируемое риманово многообразие класса C^∞, H — гильбертово пространство дифференциальных форм (не обязательно однородных) на R, имеющих конечную норму, введенную на основе естественного скалярного произведения. Оператор d вводится как замыкание оператора дифференцирования на основе нормы, а оператор d_c как аналогичное замыкание, но определенное лишь при помощи последовательностей форм с компактным носителем; подобным образом определяются операторы δ и δ_c; теми же буквами обозначаются области определения операторов. Пусть $F=\{\varphi\mid\varphi\in H,\ d\varphi=\delta\varphi=0\}$, $F_t=F\cap d_c$, $F_n=F\cap\delta_c$. Тогда имеют место формулы ортогонального разложения

$$H=[d_c\Phi]+[\delta_c\Phi]+F=[d_c\Phi]+[\delta\Phi]+F_t=$$
$$=[d\Phi]+[\delta_c\Phi]+F_n, \qquad (1)$$

где $[d_c\Phi]$ — замыкание множества $\{d_c\varphi\mid\varphi\in d_c\}$ и т. д. Соответственно вводятся три оператора Лапласа

$$\Delta_N=\delta_c d+d_c\delta,\ \Delta_L=\delta d_c+d_c\delta,\ \Delta_M=\delta_c d+d\delta_c,$$

из которых Δ_N исследован Гафни. Пусть s — фиксированное положительное число; тогда операторы Δ_L+sI, Δ_M+sI и Δ_N+sI имеют обратные L_s, M_s и N_s, для которых рассматривается ортогональное разложение, соответствующее (1). Утверждается, что операторы d и δ_c перестановочны с M_s, а F_n совпадает с пространством собственных форм оператора M_s, соответствующих собственному значению $1/s$. Далее рассматриваются полугруппы, соответствующие операторам Δ_L, Δ_M и Δ_N; в частности, обозначим $V_t=\int e^{-\lambda t}dE_M(\lambda)$, где $E_M(\lambda)$ — спектральная функция оператора Δ_M. Утверждается, что для $t>0$ оператор V_t удовлетворяет уравнению $\partial V_t/\partial t=-\Delta_M V_t$, перестановочен с d и δ_c и при данном $\varphi\in H$ $V_t\varphi\to\varphi$ для $t+0$ и $V_t\varphi\to F_n\varphi$ для $t\to+\infty$. Отсюда можно вывести, что если $\varphi\in H^r\cap d$, $d\varphi=0$, то $F_n\varphi$ имеет на каждом r-цикле с компактным носителем тот же период, что и φ; если же $\varphi\in H^r\cap d_c$, $d_c\varphi=0$, то этим свойством обладает $F_t\varphi$. В заключение рассматривается многообразие $M\subset R$ с компактным замыканием, ограниченное $(n-1)$-мерными попарно не пересекающимися многообразиями $C_1,\ldots,C_r$ класса

C^∞. Утверждается, что операторы L_s и M_s на M вполне непрерывны. Отсюда в качестве одного из следствий получается, что группа когомологий $H^q(M; R)$ изоморфна F_n^q; в свою очередь, из этого получается теорема Лефшеца: $H^q(M; R) \approx H^{n-q}(M; R)$. Аналогично выводится, что $H^q(M; C_1 \cup \ldots \cup C_s; R) \approx H^{n-q}(M; C_{s+1} \cup \ldots \cup C_r; R)$. Доказательства не приводятся.

А. Д. Мышкис

8947. О представлении К-пространств в виде кольца самосопряженных операторов. Пинскер А. Г., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, 195—198

Исследуется вопрос, при каких условиях линейное полуупорядоченное пространство (K-пространство) может быть реализовано в виде некоторого кольца самосопряженных операторов.

Последовательность $\{x_\alpha\}$, $\alpha < \vartheta$, элементов из K-пространства X называется трансфинитно сходящейся к $x \in X$, если

$$\inf_\alpha \{\sup(x_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots)\} = \sup_\alpha \{\inf(x_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots)\} = X.$$

Функционал $f(x)$, определенный на X, аддитивный и непрерывный в смысле трансфинитной сходимости, называется вполне линейным. Если в X для любого $x_0 \neq 0$ найдется такой вполне линейный функционал f_0, что $f_0(x_0) \neq 0$, то говорят, что в K-пространстве X есть достаточное число вполне линейных функционалов.

Основной результат: Для того чтобы K-пространство X ограниченных элементов допускало представление в виде некоторого кольца ограниченных самосопряженных операторов, определенных на гильбертовом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы в X существовало достаточное число вполне линейных функционалов.

Находятся также условия для того, чтобы расширенное K-пространство могло быть реализовано в виде некоторого кольца самосопряженных (ограниченных и неограниченных) операторов. В. И. Соболев

8948. О разложении коммутативного нормированного кольца в прямую сумму идеалов. Шилов (On the decomposition of a commutative normed ring into a direct sum of ideals. Šilov G. E.), Amer. Math. Soc. Translat., 1955, 1, 37—48 (англ.)

Перевод статьи автора (РЖМат, 1953, 335).

8949. О булевых алгебрах проекторов и алгебрах операторов. Бейд (On Boolean algebras of projections and algebras of operators. Bade William G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 2, 345—360 (англ.)

Булева алгебра проекторов (б. а. п.) $\mathfrak{B}$ в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ (РЖМат, 1955, 5152) называется полной (σ-полной), если для каждого подмножества (последовательности) $\{E_\alpha\} \subset \mathfrak{B}$ а) $\mathfrak{X}$ равно $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{M} = \Sigma_\alpha E_\alpha \mathfrak{X}$, $\mathfrak{N} = \Pi_\alpha (I - E_\alpha)\mathfrak{X}$, и б) проектор E_0 с областью изменения $\mathfrak{M}$ и нуль-пространством $\mathfrak{N}$, определяемым разложением а), принадлежит $\mathfrak{B}$.

Ти. иные результаты:

Теорема 2.2 Если б. а. п. σ-полна, то нормы этих проекторов равномерно ограничены.

Теорема 2.3 В полной б. а. п. слабая и сильная операторные топологии совпадают.

Б. а. п. $\mathfrak{B}$ называется имеющей простой спектр, если существует такой элемент $x_0 \in \mathfrak{X}$, что $\mathfrak{X}$ равно линейной замкнутой оболочке элементов Ex_0, $E \in \mathfrak{B}$. Для такой б. а. п. доказывается

Теорема 4. 2. Банахова алгебра (т. е. нормированное кольцо) $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$, порожденная $\mathfrak{B}$ в равномерной операторной топологии, состоит из всех ограниченных операторов, перестановочных с каждым оператором из $\mathfrak{B}$.

М. К. Фаге

8950. Анализ Фурье и дифференцирование над вещественным сепарабельным гильбертовым пространством. Браунелл (Fourier analysis and differentiation over real separable Hilbert space. Brownell F. H.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 1, 649—662 (англ.)

Рассматриваются некоторые вопросы, связанные с преобразованием Фурье и функциональным интегрированием в вещественном пространстве l_2. Пусть заданы натуральное N и положительные $h_{N+1}, h_{N+2}, \ldots, \Sigma h_j^2 < \infty$. Через X обозначим совокупность всех векторов $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, первые N координат которых произвольны, а дальнейшие удовлетворяют неравенствам $-h_j < x_j \leqslant h_j$ ($j = N+1, N+2, \ldots$). Множество X можно рассматривать как абстрактную коммутативную группу, являющуюся произведением $E_1 \times \ldots E_1 \times (-h_{N+1}, h_{N+1}] \times (-h_{N+2}, h_{N+2}] \times \ldots$, где первыми N сомножителями служат аддитивные группы E_1 вещественных чисел, а $(-h_j, h_j]$ нужно понимать как группу вращений окружности (т. е. как фактор-группу группы E_1 по ее подгруппе, состоящей из элементов $2nh_j$, $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Очевидно, X является гомоморфным образом пространства l_2, рассматриваемого как коммутативная группа относительно сложения векторов. Таким образом, топология в l_2 порождает топологию в X, превращающую X в локально компактную (благодаря $\Sigma h_j^2 < \infty$) коммутативную группу. Ее непрерывные характеры имеют вид $e^{i(\chi, x)}$ ($x \in X$), где χ — векторы из l_2, совокупность которых легко описывается. Через $\widetilde{f}(\chi) = \int e^{i(\chi, x)} f(x)\, d\varphi(x)$ обозначается преобразование Фурье по характерам; $d\varphi(x)$ — инвариантная мера на X. Можно при тех же h_j провести аналогичное построение, исходя из пространства векторов вида $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots)$, n фиксировано; соответствующую инвариантную меру обозначим через $d\varphi_n$. Функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots)$ ($x \in X$) называется абсолютно непрерывной по переменной x_n, если почти для каждой точки $(x_1^\circ, \ldots, x_{n-1}^\circ, x_{n+1}^\circ, \ldots)$ в смысле меры $d\varphi_n$ функция $f(x_1^\circ, \ldots, x_{n-1}^\circ, x_n, x_{n+1}^\circ, \ldots)$ от вещественной переменной x_n абсолютно непрерывна в обычном смысле; для такой f определена $\partial f / \partial x_n$. Типичный результат: если $f \in L_2(X, d\varphi)$ и абсолютно непрерывна относительно x_n, причем $\partial f / \partial x_n \in L_2(X, d\varphi)$, то $\widetilde{\partial f / \partial x_n}(\chi) = -i\chi_n \widetilde{f}(\chi)$ почти для всех χ в смысле инвариантной меры на группе характеров. Приведен ряд других фактов, связывающих дифференцирование $f(x)$ и умножение ее Фурье-образа на $-i\chi_n$. Вводится понятие лапласиана от $f(x)$ как операции, которая в преобразованиях Фурье заключается в переходе от $\widetilde{f}(\chi)$ к $-(\Sigma_{n=1}^\infty \chi_n^2) \widetilde{f}(\chi)$.

Ю. М. Березанский

8951. Общие критерии аппроксимации с приложениями. Нёбелинг, Бауэр (Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen. Nöbeling Georg, Bauer Heinz), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 58, № 2, 54—72 (нем.)

Рассматриваются произвольное непустое множество E любых элементов $x, y, z, \ldots$ и некоторое непустое линейное многообразие $\mathfrak{B}$ действительных и ограниченных на E функций $f, g, \ldots$, обладающее тем свойством, что если $f \in \mathfrak{B}$, то $|f| \in \mathfrak{B}$ и $\min(1, f) \in \mathfrak{B}$. Для того чтобы действительная ограниченная на E функция f была пределом равномерно сходящейся на E последовательности функций из $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали число $\delta > 0$ и конечная система функций $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{B}$ такие,

что если $|f_\nu(y)-f_\nu(z)|<\delta$ при всех $\nu=1,2,\ldots,n$, то $|f(y)-f(z)|<\varepsilon$, и если $|f_\nu(x)|<\delta$ при всех $\nu=1,2,\ldots,n$, то $|f_\nu(x)|<\varepsilon$.

Отсюда следует, что совокупность $\mathfrak{V}$ всех действительных функций на E, являющихся пределами равномерно сходящихся последовательностей функций из $\mathfrak{V}$, есть алгебра. Если $\mathfrak{M}$ — алгебра действительных и ограниченных на E функций, то $\overline{\mathfrak{M}}$ обладает указанным выше свойством линейного многообразия $\mathfrak{V}$.

Дано обобщение на тот случай, когда вместо функций рассматриваются отображения топологических векторных пространств, и указаны некоторые приложения. В частности, дается не опирающееся на теорию представлений групп доказательство следующей теоремы: для любой топологической группы G существуют хаусдорфова бикомпактная группа G' и непрерывный гомоморфизм φ группы G на всюду плотную подгруппу из G' такие, что комплекснозначная функция f, заданная на G, непрерывна и почти периодична тогда и только тогда, когда существует комплекснозначная непрерывная на G' функция F, для которой $f(x)=F[\varphi(x)]$ при всех $x\in G$.

Устанавливаются также и другие критерии подобного типа. Из них для случая, когда E — бикомпактное (соответственно, локально бикомпактное) топологическое пространство, непосредственно вытекает теорема Стоуна (соответственно теорема Накано) (Stone M. H., Math. Mag., 1948, 21, 167, 237; Nakano H., Ann. Math., 1948, 49, 281—315).

Некоторые аналогичные результаты содержатся также в работе Мака (РЖМат, 1956, 1476). А. Ф. Тиман

8952. **Описание всех неприводимых унитарных представлений классических групп. Наймарк** (Description of all irreducible unitary representations of the classical groups. Naimark M. A.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, 2, 141—145 (англ.)

Перевод из «Докл. АН СССР». 1952. 84, 883—886

8953. **Унитарные представления вещественной унимодулярной группы (основные невырожденные серии). Гельфанд, Граев** (Unitary representations of the real unimodular group (principal nondegenerate series). Gel'fand I. M., Graev M. I.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, 2, 147—205 (англ.)

Перевод статьи авторов (РЖМат. 1953, 1253)

8954. **Векторные функции на полугруппах. I. Исеки** (Vector-space valued functions on semi-groups. I. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 1, 16—19 (англ.)

Рассматриваются почти периодические функции, заданные на полугруппе, со значениями в локально выпуклом пространстве (линейном топологическом пространстве с полной системой $\{U\}$ выпуклых окрестностей нуля). Функция $f(x)$, определенная на полугруппе G, со значениями в локально выпуклом пространстве E называется почти периодической, если для всякой окрестности U найдется такое конечное семейство $A_1, A_2, \ldots, A_n$ подмножеств G, что $G=\bigcup_1^n A_i$ и из $c'xd', c'yd'\in A_i$ следует $f(cxd)-f(cyd)\in U$ для всех $c, d\in G$. Для случая, когда G — группа, доказывается следующая теорема: функция $f(x)$ из G в E будет почти периодической тогда и только тогда, когда для всякой окрестности U найдутся такие множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, содержащиеся в G, что $G=\bigcup_1^n A_i$ и из $x, y\in A_i$ следует $f(cxd)-f(cyd)\in U$ для всех $c, d\in G$. Приводится также одно достаточное условие почти периодичности функции, заданной на группе. Устанавливается, что множество всех почти периодических функций, заданных на полугруппе, представляет собой линейное пространство, замкнутое относительно равномерной сходимости.

Функция $f(x)$ из G в E называется левоэргодической, если для всякой окрестности U найдутся элемент $f\in E$ и такие элементы $a_1, \ldots, a_n$ из G, что $f-n^{-1}\times\sum_{i=1}^n f(a_i d)\in U$ для всех $d\in G$. Аналогично определяется понятие правоэргодической функции. Функция, одновременно лево- и правоэргодическая, называется эргодической.

Если E — банахово пространство и функция $f(x)$ эргодическая, то в E существует такой элемент $M(f)$ — среднее значение $f(x)$, что для всякого $\varepsilon>0$ $\|M(f)-n^{-1}\sum_{i=1}^n f(a_i d)\|<\varepsilon$ и $\|M(f)-m^{-1}\sum_{j=1}^m f(cb_j)\|<\varepsilon$ для некоторых a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ и b_j $(j=1,2,\ldots,m)$ из G. Среднее значение $M(f)$ определяется однозначно и существует для всякой эргодической функции $f(x)$, заданной на полугруппе G со значениями в локально выпуклом полном пространстве E.

Почти периодические функции со значениями в векторном пространстве изучались ранее Биркгофом и Нёйманом. Последнему принадлежит теория почти периодических функций на группах, обобщенная в недавних работах Мака на случай полугрупп.

Замечены опечатки: на стр 16, строка 12 снизу, вместо $c'x'd', c'y'd'\in A_i$ должно быть $c'xd', c'yd'\in A_i$; на стр. 17, строка 2 сверху, вместо c_0xd_0, c_0yd_0 of G должно быть c_0xd_0, c_0yd_0 of A_i. А. Г. Пинскер

8955. **Векторные функции на полугруппах. II. Исеки** (Vector-space valued functions of semi-groups. II. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 152—155 (англ.)

Часть I см. реф. 8954. Рассматриваются функции, заданные на полугруппе G, со значениями в локально выпуклом пространстве E, обладающем тем свойством, что всякая эргодическая функция $f(x)$ из G в E имеет среднее значение $M(f)$.

Множество $\mathfrak{M}$ эргодических функций называется левоинвариантным, если 1) для всяких $a\in G$ и $f(x)\in\mathfrak{M}$ $f(ax)\in\mathfrak{M}$; 2) для всех действительных чисел α, β и $f(x)$, $g(x)\in\mathfrak{M}$, $\alpha f+\beta g\in\mathfrak{M}$. Доказывается, что $M_x(f(ax))=M_x(f(x))$ и $M(\alpha f+\beta g)=\alpha M(f)+\beta M(g)$.

Функция $f(x)$ называется сильно эргодической, если для всякой окрестности U нуля E существует в E такой элемент f, что $f-n^{-1}\sum_{i=1}^n f(ca_i d)\in U$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n$ и любых c и d из G. Элемент f называется сильным средним функции $f(x)$ и обозначается $\overline{M}(f)$. Если G — полугруппа с единицей, то всякая сильно эргодическая функция будет эргодической.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — сильно эргодические функции, то функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$, $f(cxd)$ и постоянная $f(x)=f$ также сильно эргодические и $\overline{M}(\alpha f+\beta g)=\alpha M(f)+\beta\overline{M}(g)$, $\overline{M}_x(f(cxd))=\overline{M}_x(f(x))$ и $\overline{M}(f(x))=f$.

В предположении, что G — полугруппа с единицей, доказаны следующие предложения: 1) Всякая почти периодическая на G функция будет эргодической; 2) Почти периодическая функция на G со значениями в банаховом пространстве имеет одно и только одно среднее значение. А. Г. Пинскер

8956. **Почти периодические функции на модулярной группе. Маак** (Fastperiodische Funktionen auf der Modulgruppe. Maak Wilhelm), Math. scand., 1955, 3, № 1, 44—48 (нем.)

Как известно, описание совокупности почти периодических функций на группе связано с нахождением полной системы линейных унитарных представлений этой группы. В работе строится полная система таких представлений для некоммутативной бесконечной дискретной

SCANNED 23 of 38

группы подстановок $\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d)$ с целочисленными коэффициентами, где a и d нечетны, b и c четны, $ad - bc = 1$; такая группа имеет две образующие. Представления построенной системы одномерны и зависят от двух параметров. Именно, подстановке, определяемой коэффициентами a, , c, d, относится число $\exp\left\{\frac{1}{12}\pi i\,[\alpha\Phi(a,\ 2b,\ c/2,\ d) + \beta\Phi(a,\ b/2,\ 2c,\ d) - (\alpha+\beta)\,\Phi(a+c,\ (b+d-a-c)/2,\ 2c,\ d-c)]\right\}$, где α и β — вещественные параметры, а Φ выражается через сумму Дедекинда $s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1}\left(\mu/k - [\mu/k] - \frac{1}{2}\right)\left(h\mu/k - [h\mu/k] - \frac{1}{2}\right)$ следующим образом:

$$\Phi(x, y, z, u) = \begin{cases} y/u & (z = 0), \\ (x+u)/z - 12\ \mathrm{sign}\ z\ s\ (x,\ |z|) & (z \neq 0). \end{cases}$$

Если α и β — комплексные, то приведенные формулы дают линейные представления рассматриваемой группы.

Ю. М. Березанский

8957. Вполне обратимые операторы. Эренпрейс (Completely invesible operators. Ehrenpreis Leon), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **4**, № 11, 945—946 (англ.)

Пусть $\mathscr{E}$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций в n-мерном евклидовом пространстве R, $\mathscr{D}$ — его часть, состоящая из финитных функций, штрих $'$ обозначает переход к сопряженному пространству. Изучается разрешимость уравнения $W * S = T$, где $*$ есть свертка. При $T = \delta$ (функция Дирака) решение называется элементарным. Функция $J = J(y)$, принадлежащая пространству $\mathscr{F}(\mathscr{E}')$ (преобразований Фурье), двойственному с $\mathscr{E}'$, называется медленно убывающей, если существуют такие положительные числа a, b, c, что для каждой точки $x \in R$ найдется $y \in R$ с $|x - y| \leqslant a \ln(1 + |x|)$, $|J(y)| \geqslant b/(1 + |y|^c)$.

Основной результат утверждает эквивалентность следующих свойств: a) $\mathscr{F}(W)$ медленно убывает; b) $W * f \to f$ есть непрерывное отображение $W * \mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$; c) $W * \mathscr{D}' = \mathscr{D}'$; d) существует элементарное решение; e) $W * U \to U$ есть непрерывное отображение $W * \mathscr{E}'$ в $\mathscr{E}'$. Свойство c) называется вполне обратимостью оператора $S \to W * S$.

М. К. Фаге

8958. Функциональный анализ и прикладная математика. Канторович (汎函分析與應用數學·康脫羅維契 Л. В.), 數學進展 (Шусюэ цзиньчжань), 1955, **1**, № 4, 638—747 (кит.)

Перевод из журнала «Успехи матем. наук», 1948, **3**, № 6, 89—185

8959 Д. О коммутаторах и их обобщениях в гильбертовом пространстве. Бек (On commutators and generalizations of commutators in a Hilbert space. Beck William Austin. Doct. diss., Purdue Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 11, 2222 (англ.)

8960 Д. Меры в группах. Маховалд (Measure in groups. Mahowald Mark E. Doct. diss., Univ. Minnesota, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 11, 2230 (англ.)

8961 Д. Об индуцированных представлениях групп Ли. Брюа (Sur les représentations induites des groupes de Lie. Bruhat François. Autoréf. thèse Doct. Sci. math. Fac. Sci. 1955), Ann. Univ. Paris, 1956, **26**, № 1, 119—122 (франц.)

См. также: 8677, 8813, 8824, 8832, 8833, 8840, 8888 К, 9090

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8962. Аналитическая характеристика сложного, неоднородного пуассоновского процесса. Фиш М., Урбаник К., Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1955, **3**, № 3, 151—152

Аналитическая характеристика сложного, неоднородного пуассоновского процесса. Фиш, Урбаник (The analytical characterisation of the composed nonhomogeneous Poisson process. Fisz M., Urbanik K.), Bull. Acad. polon sci., Cl. III. 1955, **3**, № 3, 149—150 (англ.)

Относительно процесса с независимыми приращениями ξ_t, определенного на отрезке $[0, T]$, утверждается следующее:

Если для каждого $x \neq 0$ существует функция $Q(x, t)$, интегрируемая (L), определяемая как

$$Q(x, t) = \begin{cases} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(\xi_{t+\Delta t} - \xi_t < x), & x < 0, \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(\xi_{t+\Delta t} - \xi_t \geqslant x), & x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

причем

$$\lim_{x \to -0} Q(x, t) = Q_{(-)}(t), \qquad \lim_{x \to +0} Q(x, t) = Q_{(+)}(t), \quad (2)$$

и сходимость в (1) и (2) равномерна по t, то ξ_t является сложным пуассоновским процессом. Логарифм характеристической функции $\varphi(s, I)$ его приращения на интервале $I \subseteq [0, T]$ для каждого интервала I дается формулой

$$\log \varphi(\iota, I) = \int_{x \neq 0} (e^{isx} - 1)\, d_x \int_I Q(x, t) dt.$$

Приводится достаточный признак существования функции $Q(x, t)$.

В. М. Золотарев

8963. Расширения одной теории восстановления. Смит (Extensions of a renewal theorem. Smith Walter L.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 4, 629—638 (англ.)

Пусть $\{I_n\}$ — последовательность сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с абсолютно непрерывной функцией распределения. Обозначим через $f_k(x)$ плотность распределения случайной величины I_k и через μ_1 среднее значение отдельного слагаемого. Рассматривается функция $h(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и доказывается следующая теорема, обобщающая предыдущей результат автора (РЖМат, 1956, 3192).

Теорема. Предположим, что $\mu_1 > 0$ и $f_1(x) \in L_{1+\delta}$ для некоторого $\delta > 0$, тогда $\lim_{x \to \infty} h(x) = 1/\mu_1$, если $f_1(x) \to 0$ при $x \to \infty$ (отношение $1/\mu_1$ считается равным 0 в случае $\mu_1 = \infty$), и $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$, если $f_1(x) \to 0$ при $x \to -\infty$.

В. М. Золотарев

8964. Об одном уравнении теории восстановления. Карлин (On the renewal equation. Karlin

S a m u e l), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 229—257 (англ.)

Пусть $\{I_n\}$ — последовательность сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$ и средним значением m. Тогда, как нетрудно убедиться, функция $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{x < \zeta_n \leqslant x+h\}$ удовлетворяет уравнению

$$u(x) - \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)\,dF(y) = \int_x^{x+h} dF(y) = g(x). \quad (1)$$

Исследуются ограниченные решения уравнения (1) и его дискретного аналога

$$u_n - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}u_k = b_n. \quad (2)$$

Доказывается, что для ограниченного решения уравнения (2) всегда существуют пределы $\lim_{n\to\infty} u_n$ и $\lim_{n\to-\infty} u_n$. Существование и единственность (с точностью до постоянного слагаемого) ограниченного решения уравнения (2) гарантируется, как показано, следующими условиями:

А. Наибольший общий делитель тех индексов n, для которых $a_n > 0$, равен 1.

Б. Ряд $\Sigma\,|\,na_n\,|$ сходится и $\Sigma\,na_n = m \neq 0$.

В предположении сходимости рядов $\Sigma\,|\,n^k b_n\,|$ и $\Sigma\,|\,n^{k+1}a_n\,|$ оценивается порядок приближения u_n к своему пределу при $n\to\infty$ или $n\to-\infty$. Аналогичные результаты получаются для непрерывного случая.

Примечание референта. Частный случай уравнения (2) рассматривался референтом (РЖМат, 1955, 2315) и им получены более законченные результаты.

В. М. Золотарев

8965. О колебаниях сумм случайных величин. II. Андерсен (On the fluctuations of sums of random variables. II. Andersen E. S.), Math. Scand., 1954, **2**, № 2, 195—223 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 631.

Рассматриваются случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их суммы $S_i = \Sigma_{k=1}^{i} x_k$. Изучаются распределения вероятностей следующих случайных величин: 1) наименьший индекс L_n, для которого $S_{L_n} = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} S_i$; 2) наибольший индекс M_n, для которого $S_{M_n} = \min\limits_{0\leqslant i\leqslant n} S_i$; 3) число N_n положительных сумм среди $S_1, S_2, \ldots, S_n$; 4) минимальное число H_n значений i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, для которых $S_i = a_i$, где последовательность $a_0 = s_0$, $a_1, \ldots, a_n = s_n$ обладает следующими свойствами: а) $a_i \leqslant s_i$; б) если $a_i \neq s_i$, то $a_i = s_j + \dfrac{s_k - s_j}{k-i}(i-j)$, где $j = \max\limits_{a_\nu = s_\nu,\ \nu<i} \nu$, $k = \min\limits_{a_\nu = s_\nu,\ \nu>i} \nu$. Последняя величина в некоторой степени может служить мерой колебания последовательности сумм. Величины L_n, M_n, N_n изучались ранее многими авторами. В предположении, что величины x_i независимы и одинаково распределены, показано, что величины L_n, $n - M_n$ и N_n имеют общее распределение и что если обозначить через K_n любую из этих величин, то $P\{K_n = m\} = p_m q_{n-m}$; $P\{K_n = m/s_{n+1} > 0\} = \dfrac{1}{a_{n+1}} \sum\limits_{k=m}^{n} p_{k+1}(q_{n-k} - q_{n-k-1})$, где

$$p_n = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k = n \\ \alpha_k \geqslant 0,\ k=1,\ldots,n}} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i!)^{-1} \left(\frac{a_i}{i}\right)^{\alpha_i},$$

$$q_n = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k = n \\ \alpha_k \geqslant 0,\ k=1,\ldots,n}} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i)^{-1} \left(\frac{1-a_i}{i}\right)^{\alpha_i},$$

$$a_n = P\{s_n > 0\}.$$

В предположении, что $a_n \to a$, где $0 < a < 1$, и тех же предположениях относительно величин x_i, получено предельное распределение величины k_n/n, а именно:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{k_n}{n} < \alpha\right\} = \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^{\alpha} x^{a-1}(1-x)^{-a}\,dx,$$

что при $a = 1/2$ дает известный закон арксинуса. В случае, когда $a_n \equiv a$, даются некоторые оценки для разности между функцией распределения величины k_n/n и предельной функцией распределения. В предположении, что 1) совместная функция распределения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ симметрична относительно всех аргументов, 2) $P\left(\dfrac{s_i}{i} = \dfrac{s_j}{j}\right) = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, получены следующие результаты: H_n имеет то же распределение вероятностей, что и сумма $n-1$ независимых случайных величин $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, где y_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, принимает значения 0 и 1 с вероятностями $i/(i+1)$ и $1/(i+1)$ соответственно, а именно:

$$P\{H_n = m\} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\sum_{k=0}^{m} j_k = n} \prod_{\nu=0}^{m} \frac{1}{j_\nu}$$

$$j_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots, m.$$

Вычислены вероятности некоторых событий, связанных с H_n. Получены также некоторые дополнения к предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 2317).

А. А. Филиппова

8966. Замечания к статье «О колебаниях сумм случайных величин». Андерсен (Remarks to the paper: On the fluctuations of sums of random variables. Andersen E. S.), Math. Scand., 1954, **2**, 193—194 (англ.)

Делаются некоторые поправки и добавления к предыдущей статье (РЖМат, 1956, 631). А. А. Филиппова

8967. О двух случайных движениях на плоскости. Пикар (Een tweetal willekeurige bewegingen in een vlak. Picard H. C.), Simon Stevin, 1954, **30**, № 1, 25—43 (голл.; рез. англ.)

Рассматривается случайное движение на плоскости. Траектории движения — ломаные линии, абсолютная величина скорости постоянна и равна v, а направление скорости случайно. Предполагается, что независимо от течения процесса до момента t включительно за отрезок времени $(t, t+dt)$ происходит изменение направления скорости с вероятностью kdt, причем угол α, который образует новое направление скорости с осью OX, не зависит от предшествующего течения процесса и имеет плотность вероятности $\varphi(\alpha)$. Через r_T обозначается расстояние движущейся частицы от начала координат в момент T. Предполагается, что $r_0 = 0$ с вероятностью 1. Тогда $Mr_T = vT\sqrt{M(\sin\alpha)^2 + (M\cos\alpha)^2}$;

$$Dr_T = \frac{2v^2T}{k\{(M\cos\alpha)^2 + (M\sin\alpha)^2\}}\{(M\cos\alpha)^2 D\cos\alpha + 2M\sin\alpha M\cos\alpha\cos v(\sin\alpha\cos\alpha) + (M\sin\alpha)^2 D\sin\alpha\}$$

если распределение угла α не симметрично относительно осей OX и OY. В симметричном случае, кроме Mr_T и Dr_T, получены Mr_T^2 и Dr_T^2. Далее изучается некоторая модель броуновского движения: рассматривается плоское движения частицы под действием ударов, происходящих в случайные моменты времени, при столкновении с молекулами. Получены Mr_T и Dr_T, получены также приближенные формулы для Mr_T^2 и Dr_T^2 при больших значениях T. А. А. Филиппова

8968. Распределение определенных и неопределенных квадратичных форм. Гёрленд (Distribution of definite and of indefinite quadratic forms. Gurland John), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 1, 122—127 (англ.)

Выводится функция распределения $F(x)$ для положительно определенных квадратичных форм вида $Q_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2$, где все λ_i положительны, а X_i — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Выражение для $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{x\widetilde{\lambda}} v^{n/2-1} e^{-v/2} dv + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+n/2)} \frac{e^{-x/2\widetilde{\lambda}} x^{n/2} L_{k-1}^{(n/2)}(x/2\widetilde{\lambda})}{2^{n/2}\widetilde{\lambda}^{k+n/2}},$$

где $\widetilde{\lambda}$ — любое число, удовлетворяющее неравенству $\widetilde{\lambda} > \frac{1}{2}\max \lambda_i$, a_k — однородный многочлен k-той степени от λ_i и $\widetilde{\lambda}$, а функция $L_m^{(\gamma)}(x)$ определяется из соотношения

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m e^{-x} x^{\gamma} = m! e^{-x} x^{\gamma} L_m^{(\gamma)}(x) \quad \text{для } \gamma > -1.$$

Кроме того в работе дан вывод для функции распределения квадратичных форм вида $Q_n = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i X_i^2 - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \lambda_i X_i^2$, причем все $\lambda_i > 0$, $n_1 + n_2 = n$, а случайные величины X_i такие же, как и в первом случае. Функция распределения получена для двух случаев. 1) $x \geqslant 0$ и $n_1 = 2m$. 2) $x \leqslant 0$ и $n_2 = 2m'$.

В. П. Скитович

8969. О некоторых асимптотических свойствах однородных процессов с независимыми приращениями. Сирао (On some asymptotic properties concerning homogeneous differential processes. Sirao Tunekiti), Nagoya Math. J., 1953, **6**, 95—107 (англ.)

Рассматривается однородный процесс с независимыми приращениями $\{X(t, \omega),\ 0 \leqslant t < \infty\}$, все выборочные функции которого считаются непрерывными справа. Случайная величина $X(t)$ имеет математическое ожидание mt и дисперсию $\sigma^2 t$. Функция $\varphi(t)$, по определению, принадлежит верхнему классу, если для почти всех ω множество значений t, при которых $X(t, \omega) > \sigma\sqrt{t}\,\varphi(t)$, ограничено, и принадлежит нижнему классу, если для почти всех ω это множество неограничено. При некоторых условиях регулярности, требующих, чтобы вероятности больших приращений за конечное время были в том или ином смысле малы, доказывается, что монотонно неубывающая непрерывная справа функция $\varphi(t)$ принадлежит верхнему классу, если интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)} dt$$

сходится, и нижнему классу, если этот интеграл расходится. В частности, этот критерий справедлив для пуассоновского процесса, для процесса типа Пирсона, для симметричного гауссовского процесса и для любого процесса, у которого $M\{[X(t) - mt]^4\} < \infty$. Автор пользуется методом, примененным Феллером для процессов с дискретным временем (Feller W., Ann. Math., 1946, **47**). А. А. Юшкевич

8970. О случайных блужданиях, связанных в цепь Маркова. Слободенюк Н. П., Студ. наук. праці Київськ ун-ту, 1955, зб. 16, 165—177

Изучается следующая схема случайного блуждания по прямой с дискретным временем с переходами лишь в соседние состояния. Частица выходит из начального состояния с вероятностью p налево и с вероятностью $q = 1 - p$ направо. В последующие моменты времени вероятности перехода будут зависеть лишь от того, в какую сторону был сделан шаг в предыдущий момент времени и задаются матрицей $\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$. (Здесь p_{11} — вероятность движения налево при условии, что предыдущий шаг был налево и т. д.). При наличии поглощающих экранов в $X = 0$ и в $X = a$ вычисляется вероятность поглощения частицы экраном в $X = 0$.

Пусть $W_{z,n}$ — вероятность поглощения частицы экраном в $X = 0$ при $t = n$, если при $t = 0$ частица находится в точке z. В работе вычисляется производящая функция $W_z(t) = \Sigma_{n=0}^{\infty} W_{z,n} t^n$. Для случая блуждания без поглощающих экранов при начальном положении $X = 0$ вычисляется производящая функция положения частицы в момент n. Вычисляются также производящая функция для времени первого прохождения точки $x = z$, производящая функция времени до первого возвращения в начальное состояние.

Доказана теорема: Если все $p_{ik} \neq 0$, то при неограниченном блуждании возвращение в начальное состояние достоверно тогда и только тогда, когда матрица Π симметрична; при этом математическое ожидание времени до возвращения бесконечно.

Замечена неточность. На стр. 172 утверждается, что математическое ожидание продолжительности блуждания $D = W_z'$ (1), что неверно. Однако D действительно легко может быть получено. В работе есть опечатки. Р. З. Хасьминский

8971. О функциях распределения сумм векторов. Дёйкер (Über die Verteilungsfunktionen von Vektorsummen. Deuker E. A.), Z. Angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 4—5, 162—174 (нем.; рез. англ., франц., нем., русс.)

Рассматривается сумма S_n^p n векторов в p-мерном евклидовом пространстве. Предполагается, что направления слагаемых векторов независимы и равномерно распределены. В случае, когда длины слагаемых векторов фиксированы, получена функция распределения длины вектора S_n^p в виде несобственного интеграла от произведения функций Бесселя. Рассматривается также случай, когда длины слагаемых векторов не зависят от их направлений и являются независимыми случайными величинами. А. А. Филиппова

8972. Об эргодическом свойстве некоторого класса марковских процессов. Каллианпур (On an ergodic property of a certain class of Markov processes. Kallianpur Gopinath), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 159—169 (англ.)

Рассматриваются однородные процессы с независимыми приращениями $\{x_t, 0 \leqslant t < \infty\}$. Для некоторого класса таких процессов, выделяемого длинно формулируемыми условиями (в этот класс входит, в частности, броуновское движение), доказывается, с вероятностью 1 для почти всех (по лебеговской мере) начальных условий x_0

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T f(x_t)\,dt}{\int_0^T g(x_t)\,dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du}{\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du},$$

где $f(u)$ и $g(u)$ — интегрируемые функции. Для доказательства этого факта вводится соответствующая процессу динамическая система с бесконечной инвариантной мерой и затем показывается, что у этой динамической системы отсутствует диссипативная часть и что она является метрически транзитивной (см. РЖМат, 1955, 1395).

Во второй части работы рассматривается аналогичная задача для сумм $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ одинаково распределенных независимых величин x_i. Здесь дополняются в некоторых направлениях результаты указанной выше работы Харриса и Роббинса. Пусть, например, величины x_i имеют плотность, интегрируемую в p-й степени, $p > 1$ и последовательность $\frac{s_n}{B_n}$, где B_n — некоторые константы, сходится к симметричному устойчивому закону с показателем α ($0 < \alpha \leqslant 2$, в случае $\alpha = 2$ Mx_i^2 предполагается конечным). Для того чтобы для любых интегрируемых функций f и g при почти всех x_0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n f(a+s_i)}{\sum_{i=1}^n g(a+s_i)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\,du}{\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du},$$

необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} (B_n)^{-1} = \infty$.

Р. Л. Добрушин

8973. Игры Маркова и проблема поглощения. Невё (Jeux de Markoff et problèmes d'absorption. Neveu Jacques), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 25, 2372—2374 (франц.)

Пусть $X(t)$ — сепарабельный действительный случайный процесс, рассматриваемый в интервале времени $(0, \infty)$. Пусть существуют две случайные величины U и V с конечными математическими ожиданиями, такие, что $U < X(t) < V$ при всех t. Тогда существует верхняя грань $Y(t)$ полумартингалов $y(t)$, мажорируемых $X(t)$ (т. е. таких, что $y(t) < X(t)$ при всех t почти наверное). Определим случайную величину S как верхнюю грань моментов времени, для которых $Y(t) < X(t)$. Тогда $Y(\min(t, S))$ есть мартингал, в случае если $Y(t)$ непрерывна по вероятности. Эти результаты обобщают на непрерывный случай и продолжают результаты Снелла (Snell, Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 293). Затем эти результаты применяются к марковскому процессу.

Пусть $x(t)$ — марковский случайный процесс. Рассматривается следующее соответствие $f(x) \to Hf(x)$: $Hf(x(t))$ есть верхняя грань полумартингалов $y(t)$, мажорируемых посредством $f(x(t))$. Пусть Λ_f есть множество $\{x : Hf(x) = f(x)\}$; $z = f[x(\tau)]$, где τ — верхняя грань моментов времени, для которых $Hf(x(t)) < f(x(t))$. Тогда функция $G(x) = E\{g(z) / f(x(0)) = x\}$ такова, что $G = g$ для Λ_f и $\Omega G = 0$ для $C\Lambda_f$ (g — функция на Λ_f и Ω — инфинитезимальный оператор полугруппы, связанной с процессом $x(t)$. $G(x)$ разрешает проблему Дирихле для Ω, Λ_f. Работа не содержит доказательств.

Р. З. Хасьминский

8974. Бесконечные произведения матриц, связанные с цепями Маркова. Мустафа (Infinite matrix-products associated with Markov chains. Moustafa M. D.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1955, **A58**, № 2, 234—242; Indagationes math., 1955, **17**, № 2, 234—242 (англ.)

Рассматриваются стохастические бесконечные матрицы A и B, их произведения $C = BA$ и $E = AB$ и соотношения между C^n и E^n. Например: если последовательности элементов столбца A и B сходятся, то $\lim_{n\to\infty} C^n = L_1$ и $\lim_{n\to\infty} E^n = L_2$ существуют, если один из них существует и $L_1 = AL_2B$. Поставим в соответствие каждой матрице X матрицу Π^x:

$$(\Pi_{ij}^x) = \Pi^n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n X^r$$

(известно, что предел этот существует). Цепь, соответствующая матрице X, эргодична, если Π_{ij}^x не зависят от i, $\Pi_{ij} > 0$ и $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{ij} = 1$.

Доказано, что для того, чтобы из эргодичности цепи, соответствующей матрице $C = AB$, следовала эргодичность цепи, соответствующей матрице $E = BA$, необходимо и достаточно, чтобы ни A, ни B не имели нулевых столбцов.

М. И. Фортус

8975. Замечания о сумме Римана. Такахаси (Notes on the Riemann-sum. Takahashi Shigeru), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 1, 8—15 (англ.)

Пусть $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — измеримая по Борелю функция с периодом 1, интегрируемая на отрезке $[0, 1]$, и $\{t_n(\omega)\}$ — последовательность независимых случайных точек, каждая из которых равномерно распределена на $[0, 1]$. Рассмотрим риманову сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(t_i^{(n)})\,(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}),$$

где $t_0^{(n)} = 0$ и $t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$ — расположенные в порядке возрастания точки $t_1, \ldots, t_n$, а также аналогичные суммы $S_n(s)$ для функций $f_s(t) = f(s+t)$. Введем следующее условие: при любом $\varepsilon > 0$ и $h \to 0$

$$\left(\int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} = O\left(1 \Big/ \left|\log \frac{1}{|h|}\right|^{1+\varepsilon}\right). \quad (1)$$

Доказывается, что:

1) Если $f(t)$ интегрируема с квадратом на $[0, 1]$ и удовлетворяет условию (1) с $p = 2$, то при любом фиксированном s с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} S_n(s) = \int_0^1 f(t)\,dt. \quad (2)$$

2) Если $f(t)$ удовлетворяет условию (1) с $p = 1$, то для любого фиксированного элементарного исхода ω, за исключением ω-множества меры нуль, соотношение (2) имеет место для почти всех (по мере Лебега) значений s.

А. А. Юшкевич

8976. Вероятность неразложимости случайной отображающей функции. Кац (Probability of indecomposability of a random mapping function. Katz Leo), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 3, 512—517 (англ.)

Рассматриваются всевозможные N^N отображений $f(x)$ конечного множества Ω из N элементов в себя. Неразложимым называется такое отображение, для которого

нет ни одного непустого подмножества ω, кроме всего множества Ω, обладающего свойством $f(\omega)=\omega$ и $f^{-1}(\omega)=\omega$.

Если отображения равновероятны, то вероятность неразложимости отображения равна

$$(N-1)!/N^N\sum_{m=0}^{N-1}N^m/m!\sim(\pi/2N)^{1/2}.$$

Если рассматриваются только такие отображения, в которых запрещен переход любого элемента в самого себя, то вероятность неразложимости есть

$$\frac{(N-1)!}{(N-1)^N}\sum_{m=0}^{N-2}\frac{N^m}{m!}\sim e\left(\frac{\pi}{2(N-1)}\right)^{1/2}(N\to\infty).$$

Первый из этих результатов получен другим методом (см. Rubin H., Sitgreaves R., Appl. Math. and. Statistics Labor., Stanford Univ., 1954). В. А. Волконский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

8977. О проверке гипотез относительно совокупностей, состоящих из предметов, отмеченных альтернативно. Райский (O weryfikacji hipotez dotyczących dwóch populacyj złożonych ze sztuk cechowanych alternatywnie. Rajski C.), Zastosow. mat., 1955, 2, № 2, 179—189 (польск.; рез. русс., англ.)

Даны две генеральные совокупности, каждая из которых содержит некоторое неизвестное число предметов, отмеченных определенным способом. Обозначим через w_1 и w_2 проценты этих предметов соответственно в первой и другой совокупности, через n_1 и n_2 — численность выборок, через r_1 и r_2 — число отмеченных предметов, найденных в выборках.

Пользуясь теорией оценок и проверки гипотез Неймана — Пирсона, автор устанавливает метод проверки — при наличии данных n_1, n_2, r_1, r_2 — разных гипотез о w_1 и w_2, в частности гипотезы, что $w_1\geqslant kw_2$, где k — наперед определенная постоянная. Резюме автора

8978. Об оценке коэффициентов регрессии в случае автокоррелированного возмущения. Гренандер (On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. Grenander Ulf), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 252—272 (англ.)

Рассматривается случайная последовательность $\{x_\nu\}$ вида $x_\nu=\sum_{n=1}^{s}c^{(n)}\varphi_\nu^{(n)}+y_\nu$, где $\varphi_\nu^{(n)}$ — известные последовательности, а y_ν — стационарная последовательность с нулевыми средними значениями и непрерывной и положительной спектральной плотностью $f(\lambda)$. Ставится задача об оценке коэффициентов регрессии $c^{(n)}$ по наблюденной выборке $x_0, x_1, \ldots, x_N$.

Вначале рассматривается случай одного коэффициента регрессии ($s=1$). Оценка по методу наименьших квадратов для c и ее дисперсия имеют вид:

$$c^*=\sum_{\nu=0}^{N}x_\nu\bar{\varphi}_\nu/\Phi(N);\ D^2(c^*)=1/\Phi(N);$$
$$\Phi(N)=\sum_{\nu=0}^{N}|\varphi_\nu|^2,$$

где черточка обозначает комплексно-сопряженную величину. Последовательность φ_ν предполагается регулярной и стационарной в том смысле, что существуют и не зависят от h числа

$$R_n=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\Phi(N)}\sum_{\nu=0}^{N}\varphi_{\nu+h}\bar{\varphi}_{\nu+h+n};$$

при этом последовательность φ_ν имеет (интегральную) спектральную функцию $\varphi(\lambda)$. Доказывается, что при указанных условиях асимптотическая эффективность оценки c^* дается выражением:

$$e^2(c^*)=\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi(\lambda)}{f(\lambda)}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\,d\varphi(\lambda)\right]^{-1}$$

Указывается обобщение этого результата на случай нескольких коэффициентов регрессии. Рассматривается случай, когда последовательности $\varphi_\nu^{(n)}$ заданы аналитическими формулами вида $\varphi_\nu=\nu^p\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\nu\lambda}\,dF(\lambda)$. Показывается, что в случае асимптотически эффективной оценки сведения о корреляционной матрице последовательности y_ν не дают для задачи оценки коэффициентов регрессии каких-либо дополнительных данных. А. С. Монин

8979. Эффективность оценок метода наименьших квадратов для параметров процесса Орнштейна — Уленбека. Манн, Моранда (On the efficiency of the least square estimates of parameters in the Ornstein — Uhlenbeck process. Mann Henry B., Moranda Paul B.), Sankhyā, 1954, **13**, № 4, 351—358 (англ.)

По измеренным значениям $y_t=x_t+f(t)$, где x_t — процесс Орнштейна — Уленбека с параметрами β, σ^2 (РЖМат, 1956, 7499), а $f(t)$ — многочлен или тригонометрический многочлен, составляются оценки для коэффициентов k_i этого многочлена.

Пусть $\hat{k}_i$ — оценки максимального правдоподобия, полученные в предположении, что β и σ^2 известны; $\bar{k}_i$ — оценки метода наименьших квадратов при неизвестных β и σ^2; $\hat{f}(t)$ и $\bar{f}(t)$ — значения $f(t)$ с коэффициентами $\hat{k}_i$ и $\bar{k}_i$ соответственно. Доказывается, что оценки $\hat{k}_i$ и $\bar{k}_i$ одинаково эффективны в том смысле, что

$$\left\{E\int_0^T[\hat{f}(t)-f(t)]^2\,dt\,/\,E\int_0^T[\bar{f}(t)-f(t)]^2\,dt\right\}\to 1\quad(T\to\infty)$$

(здесь E — символ математического ожидания). А. С. Монин

8980. Общая формула стохастического предсказания. Огавара (A general stochastic prediction formula. Ogawara M.), Papers Meteorol. and Geophys., 1955, 5, № 3—4, 193—202 (англ.)

Развивается статистическая теория прогнозов, пригодная для предсказания по ограниченному количеству данных или по малым выборкам. Точная теория выборочного предсказания покоится на двух основаниях: одно — теория сравнения двух выборок с привлечением многомерной регрессии, другое — теория временных рядов с некоторым свойством «условной независимости» (такие ряды представляют случай довольно общий с точки зрения практики). Из основной теории выводятся некоторые специальные формулы прогноза. Из резюме автора

8981. О кумулянтах логарифма обобщенной дисперсии и логарифма отношения дисперсий. Беннетт (On the cumulants of the logarithmic generalized variance and variance ratio. Bennett B. M.), Skand. aktuarietidskr., 1955, № 1—2, 17—21 (англ.)

Пусть $x_{i\alpha}$ ($i=1,2,\ldots,p$; $\alpha=1,2,\ldots,n$) — выборка из p-мерной нормальной совокупности с плотностью

распределения $N(\xi, \Sigma)$, равной

$$\frac{|\Lambda|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \lambda_{ij}(x_{i\alpha}-\xi_i)(x_{j\alpha}-\xi_j)}$$

$$(\underset{\sim}{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p),\ \underset{\sim}{\Sigma} = \|\lambda_{ij}\|^{-1}).$$

Пусть далее $v_{ij} = ns_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n}(x_{i\alpha}-x_{i.})(x_{j\alpha}-x_{j.})$, где $nx_{i.} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{i\alpha}$. Приводятся выражения для кумулянт логарифма обобщенной дисперсии $|S| = |s_{ij}|$.

Пусть теперь $x_{i\alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = 1, 2, \ldots, n_1)$, $y_{i\beta}$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ \beta = 1, 2, \ldots, n_2)$ — две независимые выборки из p-мерных нормальных совокупностей с плотностями распределения соответственно $N(\xi_1, \Sigma_1)$ и $N(\xi_2, \Sigma_2)$. Приводятся выражения для кумулянт величины $\frac{1}{2}\log\frac{|v_1|}{|v_2|}$. С. Х. Туманян

8982. Кумулянты преобразованной переменной. Джеймс (Cumulants of a transformed variate. James G. S.), Biometrika, 1955, **42**, № 3—4, 529—531 (англ.)

Доказывается теорема: Если случайная величина x имеет кумулянты $\chi_{\rho x}$ всех порядков, причем $\chi_{\rho x} = 0(\nu^{-\rho+1})$ $(\rho = 1, 2, \ldots)$, и если кумулянты величины $y = f(x)$ вычислены на основе разложения Тейлора $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, в котором коэффициенты c_r не зависят от ν, то $\chi_{\rho y} = 0(\nu^{-\rho+1})$ $(\rho = 1, 2, \ldots)$.

Приводится также обобщение сформулированной теоремы. С. Х. Туманян

8983. Моменты и кумулянты квадратичных и билинейных форм нормально распределенных переменных. Камалов М. К., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, № 15, 69—77

Рассматриваются квадратичные и билинейные формы от коррелированных случайных величин (имеющих нормальное распределение) X_k и Y_k, вида

$$Q = \sum_{h,k=1}^{n} a_{h,k} X_h X_k$$

и

$$B(X, Y) = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h X_h Y_h.$$

Предполагается, что $a_{h,k}$ и λ_h — вещественные числа, а квадратичная форма Q положительно определена. В общем виде даются выражения для моментов и кумулянтов этих форм. Кроме того, даны выражения для величин $\beta_1 = M_3/M_2^2$ и $\beta_2 = M_4/M_2^2$, где M_2, M_3, M_4 — центральные моменты квадратичной формы Q. Для иллюстрации полученных результатов приведено несколько примеров. В. П. Скитович

8984. К теории случайного выбора и теории дисперсии. Енсен (A short remark on the theory of random sampling and the theory of variance. Jensen Arne), Skand. Aktuarietidskr., 1952 (1953), **35**, 195—200 (англ.)

8985. Опечатки (Corrigenda), Biometrika, 1955, **42**, № 1—2, 277 (англ.)

К РЖМат 1956, 658, 1528, 3974, 5388.

8986 К. Корреляция. Маслов П. П. М., Госфиниздат, 1955, 38 стр. Б. ц.

8987 К. Новая теория алгебраической статистики. Миядзаки (近代數理統計學通論. 宮澤光一. 共立全書. 共立出版, 301 頁, 380 圓. Кёрицу-сюппан, 1954, 301 стр., 380 иен.) (япон.)

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

8988. По поводу одной заметки Фаркуарсона. Беаль, Дрейзен (Sur une note de Farquharson. Beale Martin, Drazin Michael), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 2, 123—125 (франц.)

Рассматривается игра n лиц. Множество игроков обозначается через Q. По поводу остальных обозначений см. РЖМат, 1956, 4709.

Игра называется жесткой (jeu d'ophélimité), если из $xP_c y$ следует, что существует такое $d \in Q$, что $yP_d x$. Это понятие аналогично понятию игры с нулевой суммой для игр с численными выигрышами. Пусть задана некоторая игра (Q, R_a, S_b). Тогда существует такое бинарное транзитивное отношение R_e на X, для которого $uR_e v$ или $vR_e v$, что игра $(Q \cup \{e\}, R_a, S_b)$ является жесткой. И. В. Романовский

8989. Статистические разрешения. Кипинг (Statistical decisions. Keeping E. S.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 3, 147—159 (англ.)

Дается элементарное описание понятия статистической разрешающей функции. Излагаются некоторые модификации принципа минимакса. Н. Н. Воробьев

8990. К теории динамического программирования. Задача о складе. Беллман (On the theory of dynamic programming — A warehousing problem. Bellman Richard), Manag. Sci., 1956, **2**, № 3, 272—275 (англ.)

Дан склад с фиксированной вместимостью B и начальным количеством A определенного продукта, о котором известна его сезонная цена p_i и сезонная себестоимость c_i. Рассматривается задача, состоящая в нахождении количеств x_i заготовляемого продукта и y_i продаваемого продукта, максимизирующих доход $P = \sum_{j=1}^{n}(p_j y_j - c_j x_j)$, причем $x_i,\ y_i \geqslant 0$, $y_1 \leqslant A$; $y_i \leqslant A + \sum_{j=1}^{i-1}(x_j - y_j) \leqslant B$.

Если $f_n(A) = \max P$, то имеет место соотношение $f_n(A) = \max_{x_1, y_1}[p_1 y_1 - c_1 x_1 + f_{n-1}(A + x_1 - y_1)]$.

И. В. Романовский

8991. Некоторые задачи теории динамического программирования. Беллман (Some problems in the theory of dynamic programming. Bellman Richard), Econometrica, 1954, **22**, № 1, 37—48 (англ.)

Статья содержит общие соображения о проблемах динамического программирования, проиллюстрированные на одном частном примере.

Постановка задач динамического программирования допускает два варианта: I результат одного шага процесса полностью определяется принятым для этого шага распределением ресурсов; II процесс носит случайный характер и известны лишь вероятности (зависящие от принятого для данного шага распределения ресурсов) того или иного результата.

Иллюстративный пример относится к I варианту. На n-ом шаге сумма x_n денег разделяется на части y_n и $x_n - y_n$, причем создаются ценности $g(y_n) + h(x_n - y_n)$ и, сверх того, остается для использования на следующем шаге сумма денег $x_{n+1} = ay_n + b(x_n - y_n)$. Здесь g и h — заданные функции, a и b — заданные постоянные $(0 \leqslant a,\ b < 1)$. Требуется дать такой закон выбора y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, чтобы получить максимальное значе-

ние суммы

$$\sum_{n=1}^{N} [g(y_n) + h(x_n - y_n)],$$

где N — заданное большое число.

Пусть $x_1 \doteq x$ и $f_N(x)$ — искомый максимум. Полагая $N = \infty$, автор выводит для $f(x) = f_\infty(x)$ функциональное уравнение

$$f(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))]. \quad (1)$$

При некоторых предположениях доказывается существование и единственность решения. Характер этого решения исследуется в двух случаях, когда g и h выпуклы или вогнуты. В случае выпуклости g и h для каждого x максимум в формуле (1) достигается либо при $y = 0$, либо при $y = x$. Случай вогнутости g и h значительно более сложен.

Вкратце рассматривается II вариант постановки той же задачи: на n-ом шагу с вероятностями p_1 и p_2 соответственно создаются ценности $g_1(y_n) + h_1(x_n - y_n)$ или $g_2(y_n) + h_2(x_n - y_n)$ и остаются для использования на следующем шагу суммы $a_1 y_n + b_1(x_n - y_n)$ или $a_2 y_n + b_2(x_n - y_n)$. Выводится соответственное функциональное уравнение.

Наконец, излагается общая схема построения функциональных уравнений в задачах рассматриваемого вида. М. К. Гавурин

8992. О минимизации выпуклой функции, аргументы которой подчинены линейным неравенствам. Б и л (On minimizing a convex function subject to linear inequalities. B e a l e E. M. L.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, **B17**, № 2, 173—184 (англ.)

Излагается в общих чертах итеративная схема нахождения условного минимума выпуклой функции $C = C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных, принимающих неотрицательные значения и удовлетворяющих m ($m < n$) линейно независимым уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = B_i, \; i = 1, \ldots, m, \quad (1)$$

где A_{ij} и B_i — некоторые числа.

Более детально исследуются два частных случая этой задачи: 1) C — выпуклая квадратичная функция; 2) C — сумма t наибольших из множества g линейных форм $L_f(x_1, \ldots, x_n)$, $f = 1, \ldots, g$.

Ставится задача минимизации (в определенном смысле) линейной функции $C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ для неотрицательных x_j, удовлетворяющих (1), причем теперь коэффициенты A_{ij} и B_i в (1) предполагаются, вообще говоря, случайными величинами с известным распределением; устанавливается связь этой задачи с рассмотренной выше проблемой минимизации выпуклой функции. И. А. Ибрагимов

8993. Отчет конференции по линейному программированию, организованной фирмой «Ферранти» в Лондоне в мае 1954 г. Л е й в и н (Report of the Conference on linear programming: (Arranged by Ferranti, Ltd., London, May 1954) L a v i n M. M.), Operat. Res., 1956, **4**, № 1, 132—134 (англ.)

Приводится краткое содержание шести статей, составляющих отчет конференции:

1. Г. Н. Х е с е л ь д е н и С. В а й д а, Линейное программирование в воздушных перевозках. — Задача о минимизации стоимости авиаперевозки данного груза за данное время.

2. А. Л э н д, Задача транспортировки. Работа состоит главным образом из отчета о применении методов задачи теории линейного программирования о транспортировке к перевозкам Национального министерства угля.

3. Г. М о р т о н, Применение динамического программирования.— Динамическое программирование кратко изложено как специальная разновидность теории линейного программирования.

4. Д ж. А. К. Б р а у н, Эксперимент в анализе опросом; решение задачи о диете на Манчестерской вычислительной машине. — На основе экспериментальных данных изучалась возможность с помощью модели линейного программирования определить поведение покупателей на продуктовом рынке.

5. Е. М. Л. Б и л, Линейное программирование по методу ведущих переменных. — Метод ведущих переменных служит для численного решения задач линейного программирования. Он состоит в нахождении оптимального решения, когда некоторые из ограничений не учитываются.

6. Д. Г. П р и н ц, Некоторые опыты с методом симплекса на Манчестерской вычислительной машине.— Обзор полученных результатов. И. В. Романовский

8994 Д. Решения конечных игр двух лиц. Г е й л (Solutions of finite two-person games. G a l e D a v i d. Doct. diss., Princeton Univ., 1949), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 4, 598—599 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

8995. Статистическая теория обнаружения сигналов. М и д л т о н (Statistical theory of signal detection. M i d d l e t o n D a v i d), Trans. I. R. E., 1954, PGIT-3, 26—51 (англ.)

Обзор основных положений разработанной автором статистической теории обнаружения сигналов на фоне шумов, суммирующий и несколько обобщающий результаты, содержащиеся в ранее опубликованных статьях (см. РЖМат,1955, 1405, 1406, а также статью в сборнике «Communication theory», ed. W. Jackson, Acad. Press, 1953 и ряд заметок в разделе «Письма в редакцию» журнала J. Appl. Phys. (N. Y.) за 1954 г.) и ряде неопубликованных отчетов. Во введении указываются две различные статистические задачи, связанные с радиоприемом — задача обнаружения сигнала на фоне шумов (задача детектирования сигнала) и задача выделения сигнала из принимаемой суммы сигнала и шума (задача о фильтрации сигнала); в дальнейшей части статьи рассматривается только первая из этих задач. Вслед за этим перечисляются три основных метода использования отношения правдоподобия Λ для построения оптимальной процедуры обнаружения сигнала: метод Неймана — Пирсона, метод «идеального наблюдателя» и метод типа «последовательного анализа» Вальда (см. РЖМат. 1955, 1405); при этом предполагается, что шум является стационарным случайным процессом с известными многомерными распределениями вероятностей. Отмечается, что поскольку обычно обнаруживаемый «сигнал» представляет собой функцию, содержащую неизвестные нам параметры, то для использования всех этих методов следует считать эти параметры случайными величинами с известным распределением вероятностей и при составлении величины Λ пользоваться плотностью распределения вероятностей для наблюденных значений исследуемой функции в предположении, что она является суммой сигнала и шума, осредненной по всевозможным значениям параметров сигнала.

При дальнейшем анализе различается случай дискретного приема (когда на интервале $[0, T]$ производится n наблюдений; в предположении, что значения шума в эти моменты можно считать независимыми, де-

тектирование при таком приеме подробно рассматривалось в первых двух из цитированных выше работ автора) и случай непрерывного приема (получаемый из предыдущего в пределе при $n\to\infty$). Наряду с этим различаются: «когерентный прием» (например, в случае периодического сигнала с известной фазой или сигнала конечной продолжительности, начинающегося в известный момент) и «некогерентный прием»(при отсутствии выделенного «начального» момента времени). Особое внимание уделяется случаю слабого сигнала (когда $a_0\ll 1$, где a_0 — отношение амплитуды сигнала к среднеквадратичному значению шума на входе детектора); этот случай существенен при исследовании вопроса о «минимальном обнаружимом сигнале» (пороговом сигнале, обнаруживаемом с заранее заданной вероятностью). Указывается, что при некоторых обычно выполняющихся предположениях $\log\Lambda$ при $a_0\ll 1$ в случае «когерентного приема» линейно зависит от a, а в случае «некогерентного приема» — квадратично.

Наиболее интересны результаты, относящиеся к случаю непрерывного приема; при этом на распределения вероятностей для шума налагаются некоторые ограничения, выполняющиеся, например, в случае распределения Гаусса (этот случай в статье рассматривается также и отдельно, с большей детальностью). При сделанных ограничениях $\log\Lambda$ при $a_0\ll 1$ в случае непрерывного как когерентного, так и некогерентного приема просто выражается через переходную функцию линейного фильтра, обращающего в максимум отношение интенсивностей сигнала к шуму (по поводу таких фильтров см. Dwork B. M., Proc. I. R. E., 1950, 38, № 7, 771—774 (случай наблюдения на всей временной оси) и Zadeh L., Ragaznini J. R., Proc. I. R. E., 1952, 40, № 10, 1223—1231 (случай наблюдения в течение ограниченного интервала времени)). Нахождение указанной переходной функции сводится к решению интегрального уравнения с ядром, совпадающим (во всяком случае, для гауссовского шума) с корреляционной функцией шума. Решение этого интегрального уравнения для случая наблюдений на всей временной оси легко выписывается в общем виде (см. цитированную выше работу Дворка); для наблюдений при $t\leqslant t_0$ оно может быть получено с помощью известных методов решения уравнений типа Винера — Хопфа, и наконец, в случае конечного интервала наблюдений оно известно лишь для случая рациональной спектральной плотности шума.

В конце статьи рассмотрены некоторые конкретные примеры оптимального обнаружения сигнала (важнейший из которых заимствован из работ, прореферированных в РЖМат, 1955, 1405—1406) и вкратце рассмотрен вопрос о потере информации при выполнении процедуры обнаружения сигнала (ср. цитированную выше статью автора в сборнике «Communication theory»).

А. М. Яглом

8996. Современные статистические подходы к задаче о приеме сигналов в теории связи. Ван-Метер, Миддлтон (Modern statistical approaches to reception in communication theory. Van Meter David, Middleton David), Trans. I. R. E., 1954, PGIT-4, 119—145 (англ.)

Дается обзор путей применения общей теории «решающих функций» Вальда (Wald A., Statistical decision functions, N. Y., 1950), и «теории передачи информации» Шеннона (см., например, статью в сборнике «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», Изд-во ин. лит., М., 1953) к основным статистическим задачам теории приема сигналов — задаче об обнаружении (детектировании) сигнала на фоне помех («шумов») и задаче о выделении (фильтрации) сигнала, т. е. об определении формы сигнала по данным наблюдений за суммой сигнала и шума. Во введении излагается в абстрактных терминах общая постановка рассматриваемых задач и подчеркивается их связь с изучаемыми в математической статистике задачами о проверке гипотез (в случае детектирования) и об оценке неизвестных параметров распределения вероятностей (в случае фильтрации), а также с математической теорией игр. Вслед за этим указывается общий метод выбора оптимального решения статистической задачи по теории Вальда: каждой комбинации $(S,\ \gamma)$ сигнала S и «решения» γ (в случае детектирования пространство «решений» γ состоит из двух точек: «сигнал присутствует» и «сигнал отсутствует»; в случае фильтрации «решением» будет указание определенной формы сигнала) сопоставляется «весовая функция» $C\ (S,\ \gamma)$, оценивающая урон («убыток») из-за неточности решения γ (который, разумеется, надо считать наименьшим в случае «правильного» решения); затем $C(S,\ \gamma)$ осредняется по всевозможным значениям шума (распределение вероятностей для шума предполагается известным), при которых принимается данное решение γ, по пространству решений и по всевозможным значениям сигнала S (в тех случаях, когда предполагается известным априорное распределение вероятностей для сигнала), после чего выбор решений γ при данных результатах наблюдения определяется условием минимальности получаемого при этом «среднего урона». Найденное таким образом правило выбора решения γ называется «байесовским правилом»; в случаях, когда априорное распределение вероятностей для сигнала S отсутствует, предлагается вместо этого пользоваться «правилом минимакс»: выбирать правило решения так, чтобы максимальный (по всевозможным S или по всевозможным распределениям вероятностей для S) урон был для этого правила минимальным. Отмечается, что наряду с обычными числовыми функциями $C\ (S,\ \gamma)$ (в этом случае получаемые критерии наличия и отсутствия сигнала или критерии данной формы сигнала авторы называют «критериями наименьшего риска»), под $C\ (S,\ \gamma)$ можно понимать также «неопределенность относительно S, если известно, что выбрано решение γ», определяемую по Шеннону как $-\log P\ (S|\gamma)$, где $P(S|\gamma)$—«апостериорное» распределение вероятностей для S, если известно, что выбрано решение γ, зависящее, кроме S и γ, еще от правила выбора решения; получаемые на этом пути критерии называются «критериями наименьшей потери информации». Далее приводятся некоторые общие результаты «теории решающих функций» Вальда и указывается их смысл в применении к задаче о приеме сигналов. Вслед за этим исследуются «критерии наименьшего риска» в задаче о детектировании; показывается, что здесь и «байесовское правило», и «правило минимакс» сводятся к делению пространства результатов наблюдения на две части в соответствии с тем, превосходит или не превосходит отношение правдоподобия некоторое «критическое» значение; отмечается, что при некоторых специальных выборах $C\ (S,\ \gamma)$ мы приходим к известным в этой задаче методам Неймана — Пирсона и «идеального наблюдателя» (относительно этих методов см. РЖМат, 1955, 1405, 1406; реф. 8995); рассматривается вопрос о «наименьшем различном сигнале» и о сравнении успешности различных методов детектирования. Применение «критерия наименьшего риска» к задаче о фильтрации при выборе в качестве $C(S,\ \gamma)$ квадрата отклонения истинного сигнала S от его оценки приводит к обычному «принципу минимума среднего квадрата ошибки»; при некоторых естественных «условиях регулярности» указанный критерий приводит к оценке «наибольшего правдоподобия». Применение критериев «наименьшей потери информации» к задачам теории приема сигналов является более сложным, чем применение «критериев наименьшего риска» (в силу того, что в первом случае $C\ (S,\ \gamma)$ само зависит от правила выбора решения); тем не менее показывается,

что и этот метод приводит к ряде случаев к конкретным результатам, зачастую совпадающим с получаемыми из «принципа наименьшего риска».

С точки зрения математической строгости изложение статьи существенных возражений не вызывает.
Библ 51 назв. А. М. Яглом

8997. Реакция линейной системы на внезапно приложенный стационарный случайный шум. Лампард (The response of linear networks to suddenly applied stationary random noise. Lampard D. G.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 1, 49—57 (англ.)

Рассматривается следующий простейший вариант системы с зависящими от времени параметрами: совокупность выключателя, включающего напряжение на входе лишь начиная с фиксированного момента времени $t=0$, и обычного линейного фильтра с постоянной импульсной переходной функцией $h(u)$. Для общности предполагается, что ток $i(t)$, регулируемый выключателем, подается одновременно на вход нескольких включенных параллельно фильтров; тогда ток на выходе r-го из этих фильтров будет даваться формулой:

$$I_r(t)=\int_0^t i(t-u)\,h_r(u)\,du, \tag{1}$$

где $h_r(u)$ — импульсная переходная функция r-го фильтра. Если $i(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\psi(\tau)=E\{i(t)\,i(t+\tau)\}$ (где E — символ математического ожидания), то $I_r(t)$ будут нестационарными случайными процессами; взаимная корреляционная функция $\Psi_{rs}(t;\tau)=E\{I_r(t)\,I_s(t+\tau)\}$ r-го и s-го из этих процессов просто выражается через $\psi(\tau)$ и «зависящую от времени взаимную корреляционную функцию фильтров»

$$\varphi_{rs}(t;x)=\frac{1}{2}\int_0^t h_r(u)\,h_s(u+x)\,du, \tag{2}$$

являющуюся характеристикой фильтров (но не зависящую от статистических характеристик сигнала $i(t)$). По корреляционным функциям $\Psi_{rs}(t;\tau)$ и $\Psi_{rr}(t;\tau)$ можно определить также и зависящие от времени мгновенные спектральные плотности нестационарных процессов $I_r(t)$ (см. РЖМат, 1956, 3199). В случае, когда случайный процесс $i(t)$ — гауссовский, процессы $I_r(t)$ также будут гауссовскими; многомерное распределение вероятностей для величин $I_{r_1}(t_1), I_{r_2}(t_2), \ldots, I_{r_N}(t_N)$ в этом случае определяется хорошо известными формулами по соответствующей матрице вторых моментов $\|\Psi_{r_i r_j}(t_i;\ t_j-t_i)\|$. Далее в предположении о гауссовости $I_r(t)$ выводится формула для двумерной плотности $P_t(x,y)$ распределения вероятностей величин $I_r(t)$ и $I'_r(t)$ (штрих, как обычно, означает производную по t); полученный довольно сложный результат при $t_r\to\infty$ переходит в известное выражение для плотности распределения вероятностей величин $I(t)$ и $I'(t)$ в случае стационарного гауссовского процесса $I(t)$ (см. статью Райса в сборнике «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех». Изд-во ин. лит., М., 1953). Из выражения (2), так же как и в случае стационарных процессов (см. ту же статью Райса), выводится выражение для вероятности обращения $I_r(t)$ в нуль в заданном интервале $(t,\ t+\Delta t)$. Наконец, указывается, что при известном из измерений среднем квадрате $E\{I_r^2(t)\}=\Psi_{rr}(t,0)$ значение корреляционной функции $\psi(\tau)$ процесса на входе фильтра может быть определено из простого интегрального уравнения

$$\Psi(t;0)=4\int_0^t \psi(x)\,\varphi(t-x;\,x)\,dx$$

(где $\Psi(t;0)=\Psi_{rr}(t;0)$, $\varphi(t;x)=\varphi_{rr}(t;x)$). (3)

В заключение рассмотрены некоторые примеры. В случае, когда $\psi(\tau)=Ae^{-\beta|\tau|}$, а $h_r(u)\equiv h(u)=\alpha e^{-\alpha u}$ (т. е. фильтр является простейшим RC-фильтром), в силу (2) $\varphi(t;x)=\frac{\alpha}{4}e^{-\alpha x}(1-e^{-2\alpha t})$ и из (3) легко получается несложное выражение для среднего квадрата $\Psi(t;0)$. Далее указывается, что при $h(u)=\alpha e^{-\alpha u}$ (т. е. при $\varphi(t;x)=\frac{\alpha}{4}e^{-\alpha x}(1-e^{-2\alpha t})$) и произвольном $\psi(\tau)$ интегральное уравнение (3) просто решается; при этом для $\psi(t)$ получается очень простое выражение:

$$\psi(t)=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\left\{\Psi'(t;0)+\frac{1}{2\alpha}\Psi''(t;0)\right\}. \tag{4}$$

Последний результат может быть использован для создания простого коррелятора, не содержащего никаких «элементов задержки», а состоящего из последовательно соединенных выключателя, RC-фильтра (с постоянной времени $\alpha=\frac{1}{RC}$), квадратичного детектора (дающего на выходе $I^2(t)$) и последующих дифференциатора и суммирующего элемента, позволяющих автоматически регистрировать функцию $\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{2\alpha}\frac{d^2}{dt^2}\right)I^2(t)$; естественно, однако, что такой коррелятор будет позволять определять $\psi(t)$ с приличной точностью лишь при значениях t, меньших некоторого t_0 порядка $1/\alpha$ (ибо при $t\gg 1/\alpha$ процесс $I(t)$ будет практически стационарен и $E\{I^2(t)\}=\Psi(t;0)$ почти не будет зависеть от t, так что (4) будет содержать произведение большого множителя $e^{\alpha t}/\alpha$ на очень малую и трудно измеримую величину).

Решение уравнения (3) при специальном виде $\varphi(t;x)$, приведенное в статье, очень усложнено и оставляет ложное внечатление, что формула (4) получается при каких-то неуточненных дополнительных условиях; проще всего просто проверять эту формулу при помощи двукратного дифференцирования обеих сторон (3).
А. М. Яглом

8998. Регенеративные стохастические процессы. Смит (Regenerative stochastic processes. Smith Walter L.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 304—305 (англ.)

Очень кратко (даже без полных формулировок) описываются результаты, показывающие для некоторого класса процессов $\{x_t, 0\leqslant t<\infty\}$ с абстрактными значениями существование $\lim_{t\to\infty}P\{x_t\in A\}$, где A — измеримые множества. Идею основного предположения автора в грубой форме можно описать следующим образом: существует последовательность случайных величин $0\leqslant s_0\leqslant s_1\leqslant s_2\ldots$, такая, что все разности s_i-s_{i-1} независимы и одинаково распределены и что для каждого из моментов времени s_i будущее поведение системы не зависит от ее прошлого поведения, от ее состояния в данный момент, от s_i и от i. (Так, если процесс марковский, в качестве s_i можно взять момент i-го попадания и некоторое фиксированное состояние). Автор указывает, что его результаты находят приложение, например, при доказательстве существования предельного стационарного режима в некоторых задачах математической телефонии. Р. Л. Добрушин

8999. Таблица первых одиннадцати повторных интегралов функции ошибок. Кей (A table of the first eleven repeated integrals of the error function. Kaye Joseph), J. Math. and Phys., 1955, **34**, № 2, 119—125 (англ.)

Рассматривается функция ошибок $\operatorname{erf} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ и дополнение к ней $\operatorname{erfc} x \equiv 1 - \operatorname{erf} x$. Повторные интегралы функции ошибок определяются посредством равенств

$$i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} \xi \, d\xi \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$i^0 \operatorname{erfc} x = \operatorname{erfc} x$, $i' \operatorname{erfc} x = i \operatorname{erfc} x = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} - x \operatorname{erfc} x$. Общая рекуррентная формула есть:

$$2ni^n \operatorname{erfc} x = i^{n-2} \operatorname{erfc} x - 2xi^{n-1} \operatorname{erfc} x.$$

Приводятся таблицы функции $i^n \operatorname{erfc} x$ для $n = 1, 2, \ldots, 11$. Значения x, взятые в таблице, 0 (0,01) 0,20 (0,5) 1,00 (0,10) 3,00. Значения функции $i^n \operatorname{erfc} x$ приведены с точностью до шестой значащей цифры в выражении $i^n \operatorname{erfc} 0$ при $1 \leqslant n \leqslant 7$ и до пятой значащей цифры в выражении $i^n \operatorname{erfc} 0$ при $8 \leqslant n \leqslant 11$. С. Х. Туманян

9000. Статистические характеристики профильных кривых. Линник Ю. В., Хусу А. П. В сб.: Качество обработанных поверхностей. М.— Л., Машгиз, 1954, 223—229

Рассматриваются различные числовые характеристики профиля шлифованной поверхности, описываемого стационарной нормальной функцией $x(t)$ (РЖМат, 1956, 8206). Отмечается, что для оценки большинства параметров, характеризующих профиль, достаточно знать число гребешков на исследуемом участке и число пересечений кривой профиля с какими-нибудь двумя прямыми, параллельными линейной аппроксимации $x(t)$ по способу наименьших квадратов. На конкретных примерах показано, что непосредственные оценки многих практически важных параметров профиля поверхности обнаруживают хорошее согласие с соответствующими оценками, вычисленными по методу авторов. Л. Н. Большев

9001. Вероятностная теория водохранилищ. Моран (A probability theory of dams and storage systems. Moran P. A. P.), Austral. J. Appl. Sci., 1954, **5**, № 2, 116—124 (англ.)

Строится вероятностная модель водохранилища, предназначенного для собирания воды в течение дождливого сезона и расходования воды в течение засушливого сезона. По заданному распределению вероятностей количества поступающей воды и заданному правилу расходования воды ищется стационарное распределение количества воды в водохранилище к концу годового цикла, а также стационарное распределение количества израсходованной за год воды. Автор пользуется элементарным аппаратом цепей Маркова. Приводятся численные расчеты. А. А. Юшкевич

9002. К анализу эмпирических функций. Митман (Betrachtungen zur Analyse empirischer Funktionen. Mittmann Otfrid M. J.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 1/2, 37—43 (нем.)

См. также: 8501, 8938

ГЕОМЕТРИЯ

9003. Статическое свойство теоремы Пифагора и теоремы косинусов. Рашкович (Statička osobina Pitagorine i kosinusne teoreme. Raškovič Danilo), Tehnika, 1956, **11**, № 4, 477—479 (серб.; рез. англ.)

9004. Кратчайшее расстояние. Мандан (Shortest distance. Mandan Sahib Ram), Bull. Calcutta, Math. Soc., 1954, **46**, № 4, 237—238 (англ.)

Автор доказывает аналитическими средствами следующее предложение: Пусть a', b', c' — общие перпендикуляры пар линий b, c; c, a; a, b, aa'', b'', c'' — общие перпендикуляры пар a, a'; b, b'; c, c'. Тогда тройка линий a'', b'', c'' имеет один общий перпендикуляр. Э. Г. Позняк

9005. Треугольник Морлея и другие треугольники. Саттерли (The Morley triangle and other triangles. Satterly John), School Sci. and Math., 1955, 55, № 9, 685—701 (англ.)

Приводится ряд доказательств теоремы Морлея: три точки пересечения смежных трисекторов произвольного плоского треугольника образуют правильный треугольник. Автору принадлежат упрощения доказательств и некоторые обобщения. В. И. Шуликовский

9006. Биллиардные задачи на прямоугольнике. Цзинь Пинь. (長方形台上撞球的問題. 金品). 數學通訊, Шусюэ тунсинь, 1955, № 2, 1—4 (кит.)

Исследуется задача из учебника по геометрии для китайской школы: на прямоугольном биллиардном поле $ABCD$ лежат два шара P и Q; под каким углом к AD надо ударить P, чтобы, последовательно отражаясь от сторон AB, BC, CD, он столкнулся с Q? Автор дает полное решение этой задачи, а также расширенной задачи, когда шар P может сначала удариться о любую из сторон $ABCD$, а затем в последовательном порядке, как и раньше, о три другие. Определяются условия наикратчайшего пути шара P. Встречаются опечатки. Э. И. Березкина

9007. Характеризация многоугольников, образованных хордами и касательными окружности. Космак (Charakterisace tětiyových a tečnových mnohoúhelníků. Kosmák Ladislav), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 4, 454—461 (чеш., рез. русс., франц.)

Прямую, содержащую точки пересечений высот четырех треугольников, образованных сторонами полного четырехсторонника, автор называет ортоцентрической прямой. С помощью этого понятия даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы четыре точки (соответственно четыре прямые) при естественных ограничениях лежали на окружности (соответственно были касательными к некоторой окружности). Gy Soós

9008. Общее коническое сечение. Джамбунатхан (The general conic. Jambunathan M. V.), Math. Student, 1955, **23**, № 3, 112—116 (англ.)

Исходя из общего уравнения второго порядка в переменных x, y, автор дает, следуя методу, предложенному Гупта (РЖМат, 1954, 2687), прямой вывод (без использования преобразования координат) параметров сорта и положения на плоскости (x, y) соответствующего конического сечения. А. Г. Школьник

9009. Элементы первого и второго порядка эвольвентных и архимедовых винтовых поверхностей. (Продолжение). Колчин Н. И., Сб. тр. общетехн. кафедр Ленингр. технолог. ин-та холодильн. промсти, 1955, **8**, 30—37

Для эвольвентной и архимедовой винтовой поверхности вычислен по известным формулам дифференциальной геометрии радиус кривизны в нормальном сечении; по теореме Менье он вычислен в плоском сечении под углом γ. Рассмотрены случаи $\gamma = 0$, $\gamma = 90°$, $\gamma = \beta$ (угол подъема винтовой линии). В. С. Люкшин

9010. Преобразования, оставляющие инвариантной ортогональную или симплектическую группу. Теleman (Transformările care lasă invariant grupul ortogonal sau grupul simplectic. Teleman C.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 2, 355—363 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказывается, что наиболее общие преобразования, оставляющие инвариантной полную группу вращений n-мерного евклидова пространства, имеют вид $y^i = ua^i_j x^j (i; j = 1, \ldots, n)$, где $\| a^i_j \|$ — ортогональная матрица с постоянными коэффициентами, а u — произвольная функция от $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2$. Аналогичный результат получается для подгруппы полной группы вращений 2 n-мерного евклидова пространства, изоморфной группе комплексных унитарных матриц n-го порядка. Б. А. Розенфельд

9011 К. Четырехмерное пространство. Вейценбёк (Der vierdimensionale Raum. Weitzenböck Roland Basel — Stuttgart, Birkhäuser, 1956, 223 S., илл., 1955 DM) (нем.)

Основной задачей книги является исторический обзор и анализ того, как возникло и применяется понятие четвертого измерения в математике, физике, химии, астрономии; рассматривается также использование этого понятия и связанных с ним идей в религии, спиритизме, метафизике, мистике и другие интерпретации четырехмерного пространства, носящие спекулятивный характер. Книга имеет пять глав и большую библиографию.

В гл. 1 дается исторический обзор развития геометрии, которое, по мнению автора, происходило по следующей схеме: от геометрии плоскости (R_2) и пространства (R_3) к построению аналитической геометрии R_2, R_3, затем — построение аналитической геометрии R_n (в частности, R_4) и — как следующий этап — изучение геометрии R_n (в частности, R_4). Исследуется понятие «размерность» и его эволюция. Обосновывается вывод: все связанное с четвертым измерением и не имеющее математического обоснования, при ближайшем рассмотрении оказывается или недобросовестным или относится к области фантастики. Вводится понятие физического пространства R_4, как пространства — времени.

В гл. 2 рассматриваются основные задачи аналитической геометрии в R_4: координаты, деление в данном отношении, расстояние между точками, углы, прямые, двумерные плоскости, гиперплоскости и некоторые задачи на определение их взаимного положения; дается метод построения проекций четырехмерного тела на гиперплоскости. Исследуются вопросы о симметрии и ориентации координатных систем в R_4. Дается понятие о дифференциальной геометрии на гиперповерхностях R_4.

Гл. 3 посвящена изложению основных понятий специальной теории относительности, где рассматривается пространство — время как физическая модель R_4. Довольно подробно рассматривается история вопроса о введении времени в качестве четвертой координаты в математике, физике и механике, начиная с Лагранжа (Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, Paris, 1813) и по настоящее время. Анализируется пространственно-временной мир специальной теории относительности с детерминистской точки зрения. Вводятся основные понятия четырехмерного пространства в общей теории относительности.

Гл. 4 посвящена вопросу о приложении идей четырехмерного пространства в физике, химии и т. д. В физике, кроме специальной теории относительности, теории гравитации и вопросов единой теории поля, как пример приложения идей, связанных с четырехмерным пространством, кратко указываются другие области приложений: теория диффузии, теория пластичности и т. д. В качестве примеров приложения в химии рассматривается теория структур химических формул, теория изомеров и т. д. Рассматривается ряд астрономических теорий, связанных с понятием четырехмерного пространства как в классической астрономии так и в релятивистской.

Затем приводится подробное изложение вопроса о приложениях, не могущих претендовать на какой-либо научный смысл. Так, излагаются многочисленные попытки «доказательств» существования бога при помощи различных рассуждений, с привлечением четвертого измерения, имеющих характер софистики. По существу сюда же относятся различные спекулятивные теории метафизического характера, идея «четырехмерного человека», числовая мистика, «космическая анатомия» и т. д., разбираемые в последующих §§ этой главы.

В гл. 5 приводятся примеры использования R_4 в фантастической литературе. Библ. 239 назв. А. З. Петров

9012 К. Симметрия. Вейль (Symmetrie. Weyl Hermann. Übers. aus dem Engl., Basel — Stuttgart, Birkhäuser, 1955, 157 S., Ill.) (нем.)

Книга Вейля предназначена для не математиков, но содержит в конце пояснение того, что такое симметрия вообще, интересное и для математиков и для физиков и кристаллографов. Начиная с довольно неопределенного представления древних о симметрии как о гармонии пропорций вообще, автор далее в 4 разделах рассматривает: 1) симметрию отражения в плоскости, 2) симметрию параллельных переносов и симметрию вращений, 3) симметрию плоских орнаментов и 4) симметрию кристаллов, причем все результаты, например существование 32 точечных групп и 230 пространственных, даются без доказательства. Суть всей книги заключается в конце ее 4-го раздела (стр. 128—143), где автор переходит к общему определению симметрии. То, что группой «физических автоморфизмов» является не группа преобразований подобия пространства, а группа его ортогональных преобразований, автор мотивирует тем, что атомы имеют абсолютную величину, а то, что надо учитывать и ортогональные преобразования 2-го рода,— тем, что: «ни один закон природы не дает возможности по существу отличать правое от левого». Автор считает, что в силу всего этого и группой «геометрических автоморфизмов» пространства надо считать группу его ортогональных преобразований. Затем говорится о дальнейшем обобщении в разные стороны понятия «физический автоморфизм» — в теории относительности, в квантовой механике, в алгебре (теория Галуа, теория деления круга Гаусса). На последней странице основного текста, наконец, автор дает следующее общее определение симметрии: «Когда имеют дело с множеством Σ, имеющим некоторую структуру, то прежде всего надо найти группу его автоморфизмов, т. е. группу всех таких его преобразований, которые не нарушают всех структурных его соотношений», и дальше: «тогда можно искать симметричные конфигурации элементов Σ, т. е. такие конфигурации, которые инвариантны по отношению к некоторой подгруппе группы его автоморфизмов». Это основная мысль автора. В приложениях A и B приводятся, для математика, обычные выводы всех конечных групп вращений и вращений с отражениями трехмерного пространства.

Книга снабжена 72 иллюстрациями. Б. Н. Делоне

9013 К. Новейшая геометрия. Кобаяси (最新幾何 小林薫一. 法文社. 239 頁, 190 圖. Хобунся, 1954, 239 стр., 190 иен. (япон.)

9014 К. Фигуры, ограниченные прямыми линиями. Хокари (直線圖形. 穗刈四三二等. 共立出版, 218, 頁, 4 頁, 120 圖. Кёрицу-сюппан, 1954, 222 стр., 120 иен.) (япон.)

9015 К. Геометрия. Пособие для педагогических и учительских институтов. Кутузов Б. В., 2-е изд., М., Учпедгиз, 1954, 292, 4 р. 65 к.

9016 К. Аналитическая геометрия. Мидлмисс (Analytic geometry. 2 ed. Middlemiss Ross Raymond. McGraw-Hill., 1955, 310 p., 3.75 doll.), Cumul. Book Index,. 1955, 58, № 6, 75 (англ.)

9017 К. Введение в аналитическую геометрию и алгебру. Ч. 1. Шперпер (Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. T. 1. 2. durchges. Aufl. Sperner Emanuel. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1955, VIII, 339 S., 23.— DM), Dtsch. Bibliogr., 1956, № 5, 266 (нем.)

9018 К. Курс аналитической геометрии в пространстве. Галбурэ, Попп, Ионеску (Curs de geometrie analitică în spaţiu. Galbură Gh., Popp Simona, Ionescu Tiu Constantin. Univ. «C. I. Parhon», Bucureşti, 1955, 151 p., il.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A5, № 1, 11 (рум.)

9019 К. Циклоида. Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с нею связанных. Берман Г. Н., Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954, 116, 1 р. 90 к.

9020 Д. О системах перегородок, хордальных системах и их приложении к регулярным семействам кривых, заполняющих плоскость. Крайслер (On partition systems, chordal systems and their application to regular curve-families filling the plane. Crisrel Earl Hicks. Doct. diss. Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs. 1955, 15, № 5, 838 (англ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

9021. Об огибающих орбит Кеплера, характеризуемых заданной энергией и касающихся определенной орбиты Кеплера. Штрубеккер (Über die Hüllkurven von Kepler-Bahnen fester Energie, welche eine feste Kepler-Bahn berühren. Strubecker K.), Elem. Math., 1955, 10, № 4, 81—86 (нем.)

Рассматриваются монофокальные конические сечения k'_a с постоянной главной осью $2a$, касающейся определенного конического сечения k' с тем же фокусом S'. Доказывается: 1. Огибающая h' конических сечений k'_a есть конфокальное к k' коническое сечение. 2 Фокусы F' (отличные от S') конических сечений k'_a образуют окружность с центром T', где T' — второй общий фокус k' и h'. 3. Точки касания k'_a с k' и h' лежат на прямой, проходящей через F' и T'. Доказательство ведется методами начертательной геометрии.

Л. Я. Березина

9022. Геометрическая интерпретация главного момента пространственной системы сил с помощью демонстрационной модели. Кадиров Н. Б., Азерб. сәнае инст. әсәрләри. Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1956, вып. 12, 5—21 (рез. азерб.)

9023. К кинематике качения со скольжением. II (Сферическое качение со скольжением). Мюллер (Zur Kinematik des Rollgleitens. II (Sphärisches Rollgleiten). Müller Hans Robert), Arch. Math., 1955, 6, № 6, 471—480 (нем.)

Рассматривается качение со скольжением кривой C по C', заданных соответственно на сферах K (подвижной) и K' (неподвижной), с общим центром 0, единичных радиусов. Мгновенный полюс вращения P образует на K подвижную центроиду, на K' — неподвижную. Отношение скоростей, с которыми общая точка касания X на C, C' пробегает эти кривые, пусть λ; при качении со скольжением $\lambda \neq 1$. Для заданного движения (D), определяемого вектором вращения $\omega = e_1\omega_1 + e_2\omega_2 + e_3\omega_3$, $\omega_j = v_j(t)dt$, и данного λ все пары кривых C, C' определяются дифференциальным уравнением типа Риккати относительно декартовых координат точки, являющейся стереографической проекцией соответствующей точки на сфере. Как и в случае плоской кинематики (РЖМат, 1954, 3052), всякое движение на сфере можно рассматривать как качение со скольжением. В виде примера рассматривается задача сферического зубчатого зацепления: найти такие профили конических зубчатых колес, чтобы осуществлялось качение со скольжением с заданным постоянным λ. Получившееся уравнение Риккати интегрируется в квадратурах и искомыми профилями оказываются сферические циклоиды (трохоиды).

Коэффициент скольжения $\lambda = (PXM'M)$ есть двойное отношение лучей, идущих из центра сферы 0 в точки P, X, M', M, где M и M' — сферические центры кривизны C и C'.

Если точка X закреплена на K, то она описывает кривую C_0 на K'. Пусть M_0 — центр кривизны C_0, тогда $1/(1-\lambda) = (PXM_0M')$, $\lambda/(1-\lambda) = (PXM_0M)$.

После расширения в дуальную область явления вращения (D) формулируется посредством принципа перехода линейной геометрии Штуди обобщение качения со скольжением в линейном пространстве.

Направленной прямой трехмерного евклидова пространства соответствует дуальная точка единичной сферы. Если $\mathfrak{X}$ — луч с направляющим вектором $\bar{s}$ и векторным моментом $\bar{s}$ относительно 0, то $\mathfrak{X} = \bar{s} + \varepsilon\bar{s}$, где $\varepsilon^2 = 0$, есть дуальный единичный вектор. При расширении явления движения (D) получается группа дуальных вращений единичной сферы; этой группе соответствует группа движений линейного (евклидова) пространства, причем бесконечно малому вращению вокруг дуального полюса $\mathfrak{P} = p + \varepsilon\bar{p}$ на дуальный угол $\Omega_0 = \omega_0 + \varepsilon\bar{\omega}_0$ соответствует бесконечно малое винтовое вращение вокруг луча $\mathfrak{P}$ с углом вращения ω_0 и со сдвигом на $\bar{\omega}_0$ вдоль луча.

Центроидам, описанным дуальной точкой P с $\overline{OP} = \mathfrak{P}$ на K и K', соответствуют в линейных пространствах (подвижном и неподвижном) линейчатые поверхности. Их сферические отображения (индикатрисы) катятся друг по другу без скольжения. Катящимся со скольжением кривым C, C' соответствуют линейчатые поверхности, имеющие общую образующую и касающиеся в общей точке их стрикционных линий (в общем случае, когда $\bar{\lambda} \neq 0$, причем $\Lambda = \lambda + \varepsilon\bar{\lambda}$ есть дуальный коэффициент скольжения).

В. С. Люкшин

9024. Напряжения и смещения поверхностей с косыми горизонтальными проекциями. Рюдигер (Spannungen und Verschiebungen der krummen Flächen mit schiefem Grundriß. Rüdiger D.), Österr. Ingr-Arch., 1955, 9, № 4, 265—273 (нем.; рез. англ., франц.)

Для вычисления смещений и напряжений в поверхности, заданной явным уравнением и с параллелограммом в горизонтальной проекции, автор, исходя из соотношения между ковариантными координатами вектора смещения и тензора деформации, получает дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка, совпадающее с тем, которое дано Желле (Jellet)

для вычисления бесконечно малых деформаций нерастяжимых поверхностей с прямоугольной горизонтальной проекцией. Напряжение вследствие непрерывной нагрузки вычисляется дифференцированием некоторой функции напряжения. Дифференциальное уравнение последней в своей левой части тождественно с уравнением Пухера (Pucher), установленным для функции напряжения и используемым для определения состояния напряжения в поверхности с прямоугольной горизонтальной проекцией. Выводится дифференциальное уравнение из условий равновесия некоторого сечения поверхности, которые сначала записаны в тензорной форме, затем ковариантное дифференцирование заменяется частным дифференцированием. Общие результаты применены к специальным поверхностям: переноса, коноидным и цилиндрическим, с горизонтальными проекциями, представляющими собой параллелограммы. В. С. Люкшин

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

9025. **О ненужности теоремы Польке в преподавании начертательной геометрии.** В у н д е р л и х (Zur Entbehrlichkeit des Satzes von Pohlke im Unterricht der darstellenden Geometrie. W u n d e r l i c h W.), Elem. Math., 1955, **10**, № 4, 87—88 (нем.)

При построении свободной проекции (без учета параметров проектирующего аппарата) автор предлагает пользоваться теоремой, утверждающей, что аксонометрическое изображение соответствует данному оригиналу с точностью до аффинного преобразования (а не до подобия, как утверждает теорема Польке). Эта более слабая теорема, конечно, доказывается значительно проще. А. Р. Зенгин

9026. **Некоторые вопросы механизации чертежного процесса.** В а л ь ц Г. Б. В сб.: Методы начертательной геометрии и ее приложения, М., Гостехиздат, 1955, 382—385

После краткого обзора конструкций приборов для вычерчивания изображений, автор приводит описание своих приборов, прошедших испытание и давших хорошие результаты на практике. Интерес представляет последний аффинограф. А. Р. Зенгин

9027. **Применение метода прямоугольных координат к решению некоторых задач фотограмметрии.** Ф и л и п п о в П. В., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1954, 29, вып. 3, 42—60

Рассматривается обработка снимка на основе взаимной связи между методами центрального и параллельного проектирования. Эта связь между методами проектирования установлена при помощи метода прямоугольных координат.

В связи с возможностями при воздушном фотографировании автор разбирает случаи горизонтального, наклонного и вертикального положений пластинки — плоскости картины.

Преобразование центральных проекций может производиться при решении задач фотограмметрии, связанных с определением формы, размеров и положения в пространстве предметов по их фотографиям на плоскости, занимающей любое положение относительно поверхности земли. А. Р. Зенгин

9028. **Вычерчивание проектируемых объектов на фотографии.** Ш л е х т а (Zakreslování projektovaných objektů do fotografie. Š l e c h t a J a r o s l a v), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 4, 321—332 (чеш.)

Чтобы получить правильную картину местности после постройки сооружения, целесообразно вычертить проектируемый объект на фотографии этой местности. Для этого необходимо иметь полный чертеж проектируемого объекта, подробный план сфотографированной местности с вертикальными отметками. На фотографии должны быть известны пять точек, четыре из которых находятся в одной плоскости.

В работе рассматривается общий случай и затем частные, когда плоскость занимает горизонтальное положение и вертикальные прямые на фотографии изображаются вертикальными. А. Р. Зенгин

9029. **О проектировании при помощи хорд пространственной кривой третьего порядка.** Б р а у н е р (Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung. B r a u n e r H.), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 4, 258—273 (нем.)

Точки $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ трехмерного пространства проектируются на точки $(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$ плоскости проекций при помощи инцидентных им хорд нераспадающейся пространственной кривой третьего порядка («центральная кривая»). Затем точки $(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$ подвергаются квадратичному преобразованию по формулам $\xi_1^* : \xi_2^* : \xi_3^* = \xi_2\xi_3 : \xi_3\xi_1 : \xi_1\xi_2$. Тогда касательным центральной кривой соответствует на плоскости основное коническое сечение q^*, линейному комплексу пространства — коническое сечение, прямой — как оси специального комплекса — коническое сечение, являющееся охватывающим по отношению к q^* («Schließungskegelschnitt»; оно проходит через вершины ∞^1 треугольников, описанных около q^*),и т. д. Это соответствие дает возможность переходить от теорем о пространственных образах линейчатой геометрии к теоремам о конических сечениях плоскости и обратно. Р. Н. Щербаков

9030. **Введение в эллиптическую геометрию.** Г а н с (An introduction to elliptic geometry. G a n s D a v i d), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 7, 66—75 (англ.)

Излагается аксиоматическое построение двух геометрий на плоскости, в основе которого лежит отказ от бесконечности длин прямых и отсутствие параллельных. Исходные неопределяемые понятия: «точка», «линия», «замкнутая линия», «длина». Линия имеет конечную длину и содержит точки.

Д в о й н а я э л л и п т и ч е с к а я г е о м е т р и я базируется на следующих аксиомах: I. Прямая линия — замкнутая линия конечной длины, не пересекающая себя. II. Любые две прямые пересекаются в двух точках. III. Среди линий, соединяющих две точки, существует по крайней мере одна, длина которой наименьшая; такая линия называется отрезком, а ее длина — расстоянием между двумя точками. IV. Любые две точки прямой линии делят ее на две линии, причем по крайней мере одна из них является отрезком; если обе линии — отрезки, то точки антиподальны. V. Любой отрезок, соединяющий две точки, содержится в некоторой прямой линии, проходящей через эти точки. VI. Прямая линия, проходящая через две точки — единственная в том и только в том случае, если точки не антиподальны (существование прямой, проходящей через две точки, следует из предшествующих аксиом). Из аксиом I—VI выводится, что все прямые линии пересекаются и имеют одинаковую длину. Длина всех равных между собою отрезков, образованных пересечением прямых линий, принимается за единицу. Тогда длина прямой линии — 2 единицы. Доказывается, что расстояние между двумя точками является наибольшим, и равным 1 только в том случае, когда точки антиподальны. Далее принимается (VII), что теория углов та же, что и в плоской евклидовой геометрии, и вводится понятие треугольника, как фигуры, состоящей из трех неколлинеарных точек и трех отрезков (сторон треугольника), их соединяющих. Постулируется (VIII), что треугольники конгруэнтны по двум сторо-

нам и заключенному между ними углу, и что (IX) прямая линия, делящая угол треугольника, встречает противоположную сторону. Из этих аксиом выводится, что все прямые линии, перпендикулярные данной прямой линии, проходят через одни и те же две точки и делятся этими точками и данной прямой на четыре равных отрезка.

Простая эллиптическая геометрия определяется восемью аксиомами. Аксиомы I, III, IV, V совпадают с соответствующими аксиомами двойной эллиптической геометрии, а аксиома II формулируется так: любые две прямые линии пересекаются в одной точке. Из аксиом I—V выводится, что через любые две точки проходит единственная прямая линия, в том числе и через антиподальные точки (понятие антиподальности здесь относится к определенной прямой линии). Теория углов сохраняется (VI). Треугольник может иметь сторонами любые части прямых линий. Треугольники считаются конгруэнтными по двум углам и стороне, заключенной между ними (VII). Наконец (VIII), если два угла треугольника — прямые, то противоположные стороны равны. Отсюда следует, что все перпендикуляры к прямой линии p пересекаются в точке P (полюс прямой p), и всякая прямая, проходящая через P, перпендикулярна p. Расстояние α от P до p называется полярным расстоянием. Все прямые линии имеют одно и то же полярное расстояние и одну и ту же длину 2α. Наибольшее расстояние между двумя точками равно α; на этом расстоянии находятся только антиподальные точки. А. Г. Школьник

9031. **О спрямлении дуг циклов.** Сас (A ciklusívek rektifikációjáról. Szász Pál), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, 5, № 2, 145—148 (венг.)

В предыдущей работе автора (Acta scient. math., 1950, A12, 44—52) доказывается, независимо от аксиомы параллельности, следующая теорема: Если C — внутренняя точка дуги $\overset{\frown}{AB}$ некоторой окружности, тогда $\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{AB} < AC : AB$, где AC и AB — соответствующие хорды. Эта теорема применима и для эквидистант и орициклов. Опираясь на нее, автор дает метод, с помощью которого легко доказывает теорему о спрямлении дуг циклов (под циклом понимается окружность, эквидистанта и орицикл). Следствие: $p/s \to 1$, если $\sigma \to 0$, где p — длина дуги σ некоторого цикла, s — хорда дуги. Автор замечает, что это следствие служит простейшей основой для вывода формул гиперболической тригонометрии с помощью эквидистантной поверхности. GySoós

9032 К. **Изображения и геометрические преобразования.** Лейбин А. С., Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1954, 52 стр., 80 к.

9033 К. **Справочные таблицы по начертательной геометрии.** Морозов П. К., М., Связьиздат, 1954, 110 стр., беспл.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

9034. **О пространственных кривых третьего порядка и о поверхностях третьего порядка с четырьмя двойными точками.** Билo (Sur les cubiques gauches et sur les surfaces cubiques ayant quatre points doubles. Bilo J.), Mathesis, 1955, 64, № 3—5, 93—97 (франц.)

Доказываются теоремы:

1. Чтобы можно было вписать в пространственную кривую третьего порядка два тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ и $B_0B_1B_2B_3$, необходимо и достаточно, чтобы точки $P_0P_1P_2P_3$ пересечения плоскостей

$$P_0\begin{cases}B_1A_2A_3\\A_1B_2A_3\\A_1A_2B_3\end{cases},\quad P_1\begin{cases}B_0A_2A_3\\A_0B_2A_3\\A_0A_2B_3\end{cases},\quad P_2\begin{cases}B_0A_1A_3\\A_0B_1A_3\\A_0A_1B_3\end{cases},\quad P_3\begin{cases}B_0A_1A_2\\A_0B_1A_2\\A_0A_1B_2\end{cases}$$

были коллинеарны.

2. Чтобы поверхность третьего порядка с четырьмя двойными точками $A_0A_1A_2A_3$ проходила через вершины тетраэдра $B_0B_1B_2B_3$, необходимо и достаточно, чтобы точки $P_0P_1P_2P_3$ были компланарны. Я. П. Бланк

9035. **Сопряженные классы группы кубической поверхности в ортогональном представлении.** Эдж (The conjugate classes of the cubic surface group in an orthogonal representation. Edge W. L.), Proc. Roy. Soc., 1955, A233, № 1192, 126—146 (англ.)

Воспроизводятся результаты Фрама (Frame J. S., Ann. mat. pura ed. appl., 1951, 32, 83), относящиеся к разложению на классы (в числе 25) сопряженных элементов группы G кубической поверхности, имеющей порядок 51840. Классификация проводится, исходя из представления G ортогональными матрицами порядка 5 над полем Галуа $GF(3)$. Основываясь на том, что если M — ортогональная матрица нечетного порядка с определителем 1, то ранг $M - E$ четный, а $M + E$ нечетный, автор относит каждой такой матрице два непересекающихся пространства S_+ и S_-. Классификация элементов группы проводится первоначально по размерности объединения S_+ и S_-, затем по размерностям самих S_+ и S_- и, наконец, по поведению их по отношению к инвариантной квадрике ортогональной группы. В последнем случае используются результаты автора по геометрии четырехмерного пространства (РЖМат, 1956, 8331). В заключение приведены таблица всех 25 классов, характеристики соответствующих пространств S_+ и S_-, число элементов класса и порядок их.

В. В. Морозов

9036. **О четырехстороннике Диксона и Мортона, определяемом тремя ассоциированными парами трехгранников Штейнера, относящихся к поверхности 3-го порядка.** Меньё (Sur le quadrilatère de Dixon et Morton déterminé par trois couples associés de trièdres de Steiner relatifs à une surface cubique. Meynieux R.), Publs scient. univ. Alger, 1954, A1, № 1, 183—195 (франц.)

Дается существенно новое доказательство следующей теоремы: вершины трех ассоциированных пар трехгранников Штейнера относительно поверхности 3-го порядка принадлежат одной и той же плоскости, где они образуют три пары противоположных вершин полного четырехсторонника. Оригинальность реферируемой работы заключается главным образом в употреблении некоторой рациональной, антисимметрической функции трех переменных точек плоскости, определяемой сначала кубической формой, а затем ограниченной случаем, когда три точки принадлежат плоской кривой 3-го порядка. Н. А. Колмогоров

9037. **Алгебраические поверхности на конусе Веронезе.** Годо (Surfaces algébriques tracées sur un cône de Veronese. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 9, 863—869 (франц.)

В шестимерном пространстве S_6 автор ввел трехмерный конус 4-го порядка V_3^4, который он называет конусом Веронезе, потому что его сечения гиперплоскостями будут поверхностями Веронезе. Изучение различных типов инволюций привело автора в прежних работах к исследованию пересечения конуса Веронезе либо кубической гиперповерхностью, либо гиперповерхностью n-го порядка, но каждый раз требовалось установить жанры рассматриваемой поверхности. Имея в виду позднее исследовать некоторые специальные инволюции, автор рядом отображений и бирациональных преобразований доказывает две теоремы:

1) Поверхность F порядка $4n$ в S_6 — пересечение конуса Веронезе V_3^4 и гиперповерхности n-го порядка

имеет жанры

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3),\ p^{(1)} = n(2n-5)^2+1.$$

2) Поверхность F_1 порядка $4n-2$, которая с конусом 2-го порядка образует пересечение конуса Веронезе V_3^4 с гиперповерхностью n-го порядка, имеет жанры

$$p_a = p = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-9),\ p^{(1)} = 2(n-3)^2(2n-1)+1$$

С. С. Бюшгенс

9038. О касании алгебраических поверхностей вдоль кривых. Галларати (Sul contatto di superficie algebriche lungo curve. Gallarati Dionisio), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **38**, 225—251 (итал.)

Изучаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две неприводимые гиперповерхности $F=0$, $G=0$, порядков m и n соответственно, в S_r имели касание $(q-1)$-го порядка по $(r-2)$-мерному многообразию C, q-я кратность которого исчерпывает пересечения F и G. Условия эти состоят в существовании таких форм A, B, H, что $AF+BG \equiv H^q$, причем многообразие $A=B=F=G=0$ имеет размерность не выше $r-3$. Исследуются также возможности существования особенностей у F и G на C: так, если C содержит двойное подмногообразие F размерности $r-3$ и порядка $s \geqslant 0$, причем $n \geqslant m$, $q-1 \geqslant 1$, то C содержит также двойное подмногообразие G размерности $r-3$ и порядка $t = mn(m-n)/q + s$.

Подробно изучается касание поверхностей трехмерного пространства вдоль неприводимой кривой C жанра p без кратных точек (которая вообще не исчерпывает всех пересечений F и G). Если F и G имеют только обыкновенные двойные точки, s и t из которых соответственно лежат на C, то выполняются условия: $s-t = mn \times (m-n)/2$; $p = 1 + mn(2m+n-8)/8 - s/4$ (эти условия, как указывает автор, были получены Б. Сегре в неопубликованной работе). Показывается, что при $m \leqslant 4$ эти условия оказываются достаточными, именно: если поверхность $F_m (m \leqslant 4)$ в S_3 имеет только обыкновенные двойные точки и C — проходящая через s таких точек кривая на F_m порядка $mn/2$ $(n \geqslant m)$, жанра $p = 1 + mn(2m+n-8)/8 - s/4$ и не имеющая особенностей, то существует линейная система размерности $\binom{n-m+3}{3}$ поверхностей порядка n, имеющих с F_m простое касание вдоль C. Как частный случай, отсюда следует известная теорема Гумберта о поверхностях Куммера (Humbert G., J. math. pures et appl., 1893, **9**, 54; ссылка автора не точна).

В заключение проводится эффективное построение поверхностей, касательных к F_m в S_3 для случаев $m = 2,3,4$ (за исключением двух случаев для $m=4$, не разобранных до конца). Такое построение для $m = 2,3$ ранее было проведено элементарными методами в ряде работ Годо. Указывается, как применяемый автором метод может быть использован в случае $m \geqslant 5$.

В. В. Морозов

9039. Кривая дирамации некоторых кратных плоскостей. Оржеваль (Courbe de diramation de certains plans multiples. Orgeval Bernard de), Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1953, **22**, № 3—4, 188—194 (франц.)

Школа Кизини дала несколько новых результатов, касающихся характеристики кривых дирамации кратных плоскостей, однако изученные случаи все же являются наиболее простыми, именно для поверхности обычного пространства без кратной линии и с одной кратной точкой и касательным конусом наиболее общего порядка. Автор несколько расширяет эти случаи, исследуя такой, который является наиболее простым. А именно, он устанавливает необходимое и достаточное условие, чтобы кривая была кривой дирамации для кратной плоскости, представляющей поверхность S_4 пересечение квадрики и гиперповерхности порядка n — имеющую две кратных точки порядков h и k кратная плоскость будет порядка $2n-h-k$.

С. С. Бюшгенс

9040. Исследование точек дирамации третьей категории для кратной поверхности. I, II. Годо (Recherches sur les points de diramation de triosième catégoric d'une surface multiple. I, II. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, **39**, 5 sér., № 12, 1013—1023; 1087—1093 (франц.)

Пусть Φ — образ циклической инволюции порядка простого p на алгебраической поверхности F, на Φ предполагаются точки дирамации изолированными. Точка дирамации называется точкой дирамации второго вида и третьей категории, если касательный конус к Φ в точке дирамации распадается на четыре рациональных конуса. Проектируем Φ из рассматриваемой точки на гиперплоскость охватывающего пространства и пусть этой проекцией будет поверхность Φ_1.

Области точки дирамации на Φ_1 соответствуют четыре рациональных кривых σ_α, τ_α, τ_β, σ_β. Кривые τ_α и τ_β пересекаются в точке A_1', кривые σ_α, τ_α — в точке A_{11}' и кривые τ_β, σ_β — в точке A_{12}', не существует никакой другой точки, общей паре из указанных кривых. Могут ли точки A_1', A_{11}', A_{12}' быть двойными точками поверхности Φ_1? Автором ранее построены примеры, в которых точки A_{11}', A_{12}' оказываются двойными. В данной заметке и в следующей исследуется точка A_1', причем здесь указывается случай, когда при выполнении некоторого неравенства точка A_1 является двойной бипланарной для Φ_1.

Прежде чем перейти к изучению случаев, когда точка A_1' вообще будет двойной бипланарной, автор рассматривает случаи, когда точка A_1' на Φ_1 является простой или двойной конической.

С. С. Бюшгенс

9041. Об ассоциированном поведении и редукции особенностей. Дервидюе (Sur le comportement associé et la réduction des singularités. Derwidué L.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, **24**, № 6—9, 212—238 (франц.)

После нескольких неудачных попыток дать полное доказательство теоремы о возможности редукции особенностей алгебраического многообразия посредством конечного числа элементарных преобразований (см., например, РЖМат, 1954, 2302) и учитывая критику Семпля (Semple J. G., Math. Revs, 1954, 15, № 6, 552) и Зариского (РЖМат, 1955, 3926), автор подробно обосновывает нужные для доказательства свойства ассоциированного поведения, давая алгебраические доказательства тем фактам, на необходимость алгебраического обоснования которых указал Семпль. В результате, хотя и не достигается степени общности, требуемой для полного доказательства цитированной теоремы, но оказывается возможным дать ее доказательство для случая двумерного многообразия (в этом случае, как известно, редукция возможна; см., например, цит. выше реф. 2302).

В. В. Морозов

9042. О некоторых поверхностях, образованных ковариантами бинарных форм. Филиппи (Su certe superficie generate da covarianti di forme binarie. Filippi Lidia), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 285—289 (итал.)

В трехмерном комплексном проективном простран-

стве даны поверхность F n-го порядка и конгруэнция C, состоящая из всех прямых r, которые пересекают две данные скрещивающиеся прямые s и t (директрисы конгруэнции). Каждая прямая r пересечет поверхность F в n точках; им отвечает бинарная форма f n-го порядка. Ковариант формы f порядка m, степени g и веса $\mu = (1/2)(ng - m)$ задает на той же прямой m точек; при изменении r эти точки образуют поверхность Ф.

Доказывается, что Ф — алгебраическая поверхность порядка ng и что директрисы s и t принадлежат ей с кратностью, равной μ. В качестве примера рассматривается случай, когда $n = 3$, а ковариант формы f есть ее гессиан.

Г. Б. Гуревич

9043. Циклы на алгебраических многообразиях. Морикава (Cycles on algebraic varieties. Morikawa Hisasi), Nagoya Math. J., 1955, 9, Oct., 173—180 (англ.)

Рассматривая неособенное алгебраическое многообразие V комплексной размерности n в проективном пространстве и применяя теорию гармонических интегралов, автор получает некоторые соотношения для циклов на V и для матриц $\Omega^{(p,q)}$ периодов гармонических форм типа (p, q); в заключение устанавливается новый бирациональный инвариант для V, названный автором ограниченным числом Пикара. Число это определяется как порядок $H^*_{n-1}/H^*_{n-1} \cap K^*_{2n-2}$, где H^*_{n-1} — подгруппа группы гомологии H_{2n-2} для V над полем рациональных чисел, состоящая из всех классов, содержащих алгебраические циклы, а K^*_{2n-2} — подмодуль H_{2n-2}, состоящий из тех циклов Z, для которых $I(W_2 Z \Gamma_1^{i+} \Gamma_1^{j+}) = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, B_1 =$ порядку $H_1)$. Здесь W_2 — производящее гиперплоскостное сечение V комплексной размерности 2, Γ_1^i — базис H_1, а Γ_1^{j+} — соответствующий базис H_{2n-1} $(I(\Gamma_1^i \Gamma_1^{j+}) = \delta_{ij})$.

В. В. Морозов

9044. Гомологии на алгебраических многообразиях. Уоллес (Homology on algebraic varieties. Wallace Andrew Hugh), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 263—264 (англ.)

Резюме доклада без доказательств. Если V^r — неособенное алгебраическое многообразие в проективном пространстве $[n]$ над полем комплексных чисел, то можно выбрать такой пучок прим П, определенных параметром z, что из примесечений V_z все будут неособенными, кроме конечного числа V_{z_i} $(i = 1, \ldots, k)$, последние же будут иметь лишь по одной особенности. Пусть V_{z_*} — неособенное примсечение и l_i — вещественный аналитический путь от z_0 к z_i. Устанавливается связь групп гомологий $H_q(V, V_{z_0})$ с $H_q(V_{l_i}, V_{z_0})$ и указывается способ построения базиса $H_r(V_{l_i}, V_{z_0})$.

В. В. Морозов

9045. Формы первого и второго рода, связанные с алгебраическими многообразиями. Северн (Les formes de première et de seconde espèces attachées à une variété algébrique. Severi Francesco), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 1, 59—61 (франц.)

Рассматриваются неприводимое алгебраическое многообразие M_r без особенностей размерности r, погруженное в комплексное аффинное пространство S_d, и внешняя дифференциальная форма ω степени k, коэффициенты которой — рациональные функции на M_r; M_r и ω изучаются с точностью до бирациональных преобразований.

Периодом формы ω называется значение $\int_\omega$ на некотором цикле Γ_k многообразия M_r; если Γ_k не содержит особенностей формы ω и гомологичен на M_r нулю, то период носит название вычета. Форма ω — первого рода, если в некоторой окрестности любой точки P многообразия M_r локальные координаты могут быть выбраны так, что все коэффициенты формы ω становятся голоморфными в точке P; ω будет формой второго рода, если все ее вычеты равны нулю. Перечисляется ряд известных результатов Пуанкаре, Кэлера, Ходжа и др. и указывается, что всякая форма первого рода является в то же время и формой второго рода и что все ее периоды конечны.

Г. Б. Гуревич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

9046. О проблеме Бианки изгибания в изотермическую поверхность. Сансоне (Sur problema del Bianchi dell'applicabilità sopra una superficie isoterma. Sansone Giovanni), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 332—338 (итал.)

Поверхность называется изотермической, если ее линии кривизны образуют изотермическую сеть. Решается проблема, предложенная автору Бианки в 1926 г.: найти условия, чтобы поверхность допускала изгибание в изотермическую, иначе, чтобы существовала поверхность, которая, будучи отнесена к линиям кривизны, имеет данный линейный элемент $ds^2 = e^{2\lambda}(du^2 + dv^2)$. Из уравнения Гаусса следует $-e^{2\lambda}/r_1 r_2 = \lambda_{uu} + \lambda_{vv}$, где r_1, r_2 — главные радиусы. Отсюда $e^\lambda / r_1 = \sqrt{\omega}\,|\lambda_{uu} + \lambda_{vv}|^{1/2}$, $\frac{e^\lambda}{r_2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}|\lambda_{uu} + \lambda_{vv}|^{1/2}$, $\varepsilon^2 = 1$. Из уравнений Кодацци следует

$$\omega_u = -\omega\alpha_u + 2\varepsilon\lambda_u, \quad \omega_v = \omega\alpha_v - 2\varepsilon\omega^2\lambda_v, \qquad (*)$$

где $\alpha = \ln|\lambda_{uu} + \lambda_{vv}|$.

Условие интегрируемости системы (*) имеет вид

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0. \qquad (1)$$

Дифференцируя его по u и v, автор получает еще два квадратных уравнения относительно ω — (2) и (3). Равенство нулю детерминанта системы (1), (2), (3) и результанта системы (2), (3) дает необходимые и достаточные условия существования изотермической поверхности с данным линейным элементом. Ввиду того, что найденные условия не имеют инвариантной формы, автор не считает проблему Бианки полностью решенной.

Я. П. Бланк

9047. Проективные и аффинные свойства венка поверхностей Дарбу. Боль (Projektive und affine Eigenschaften des Darbouxschen Flächenkranzes. Bol Gerrit), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg., 1955, **20**, № 1—2, 64—96 (нем.)

Относительно некоторой аффинной системы координат задается конфигурация («A-фигура»), состоящая из шести точек и шести плоскостей. Точки попарно лежат на трех лучах, проходящих через начало координат (центр A-фигуры) и не компланарных ни между собой, ни с осями координат (осями A-фигуры). Каждая плоскость проходит через две точки, лежащие на разных лучах и параллельно двум осям. Двупараметрическое семейство A-фигур с общим центром, подчиненное условию попарного совпадения поверхностей, описываемых точками, с поверхностями, огибаемыми инцидентными плоскостями, называется полувенком. Присоединив к шести поверхностям полувенка еще шесть поверх-

ностей, полярных с ними относительно поверхности $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$, получим совокупность двенадцати поверхностей Дарбу, называемую «венком поверхностей» (Darbouxscher Flächenkranz).

Аналитически дело сводится к заданию радиус-векторов a, b, c, трех точек A-фигуры, девяти линейных дифференциальных форм $\alpha_1 \ldots \gamma_3$, при помощи которых дифференциалы векторов a, b, c выражаются через сами эти векторы, и трех скаляров a, b, c, умножением на которые векторов a, b, c получаются радиус-векторы трех остальных точек A-фигуры. Формы $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ и дифференциалы функций a, b, c связаны шестью линейными уравнениями. Доказывается: 1) возможность и единственность бесквадратурного построения венка Дарбу, содержащего заданную пару поверхностей, связанных ортогональностью линейных элементов, и имеющего центром начало системы координат, относительно которой заданы поверхности, 2) возможность бесквадратурного построения с произволом в одну постоянную венка Дарбу, содержащего фокальные поверхности заданной конгруэнции W, и имеющего центр в данной точке. Попутно получается ряд ранее известных свойств венка Дарбу и конгруэнции W. Р. Н. Щербаков

9048. О поверхностях, у которых асимптотические линейчатые поверхности принадлежат линейным комплексам. Годо (Sur les surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires. Godeaux Lucien), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **20**, № 1—2, 57—63 (франц.)

Доказывается, что существуют такие конгруэнции W, у которых асимптотические одного семейства одной фокальной поверхности принадлежат линейным комплексам Σ, а соответствующие им асимптотические линейчатые поверхности (РЖМат, 1955, 5271) второй фокальной поверхности также принадлежат линейным комплексам Σ. Линейные комплексы Σ содержат характеристические линейные конгруэнции соответствующих комплексов Σ_0 и находятся в инволюции с соответствующими соприкасающимися линейными комплексами Σ_0 конгруэнции.

Если на одной фокальной поверхности конгруэнции W асимптотические линии одного семейства принадлежат линейным комплексам, не находящимся в инволюции с комплексами Σ_0, то у второй фокальной поверхности принадлежат линейным комплексам или соответствующие асимптотические линии или соответствующие асимптотические линейчатые поверхности. Если у одной фокальной поверхности конгруэнции W асимптотические линейчатые поверхности одного семейства принадлежат линейным комплексам, находящимся в инволюции с комплексами Σ_0, то у второй фокальной поверхности принадлежат линейным комплексам или соответствующие асимптотические линии или соответствующие асимптотические поверхности.

Р. Н. Щербаков

9049. Пара поверхностей с общими аффинными нормалями. Глаголева П. Н., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, **35**, 9—16

Методом внешних форм доказывается, что пара поверхностей с общими аффинными нормалями существует с произволом 6 функций одного аргумента. Среди них с произволом в 4 функции одного аргумента существуют пары поверхностей с параллельными касательными плоскостями в соответствующих точках. Особое решение представляет случай аффинных сфер, определяемый произволом в 2 функции одного аргумента. К каждой из таких сфер можно присоединить однопараметрическое семейство параллельных ей аффинных сфер.

Геометрическая характеристика поверхностей, допускающих параллельные им поверхности с общими аффинными нормалями, может быть записана в виде соотношения $kK - 2H = \text{const}$ (k=const), где K и H — соответственно полная и средняя аффинные кривизны данной поверхности, k — аффинное расстояние между соответствующими поверхностями по общей нормали

Н. И. Кованцов

9050. Об одном семействе сетей, состоящих из плоских и геодезических линий. Винченсини (Su una famiglia di reti geodetico-planari. Vincensini Paul), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 1, 11—16 (итал.)

Более подробное изложение и доказательства результатов, опубликованных ранее (РЖМат, 1955, 5271).

Р. Н. Щербаков

9051. Бинормальные семейства конгруэнции. Рыбаков В. Н., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, **35**, 167—259

См. РЖМат, 1954, 3814.

9052. О конгруэнциях W, у которых асимптотические линии одной фокальной полости принадлежат линейным комплексам. Розе, Легрен-Писсар (Sur les congruences W dont une des nappes focales est une surface ayant ses asymptotiques des deux familles dans des complexes linéaires. Rozet O., Legrain Pissard N.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, **23**, № 9—10, 280—296 (франц.)

Нормальные координаты поверхности, отнесенной к асимптотическим линиям, удовлетворяют уравнениям

$$x_{uu} + 2bx_v + c_1 x = 0,\ x_{vv} + 2ax_u + c_2 x = 0.$$

Пусть (x) — фокальная полость конгруэнции W. Луч конгруэнции соединяет точку x с точкой $\lambda x_u - \mu x_v$, причем

$$\lambda_v + 2a\mu = 0,\ \mu_u + 2b\lambda = 0, \qquad (1)$$

Если асимптотические линии обоих семейств поверхности (x) принадлежат линейным комплексам, то

$$\lambda_u - (\ln a)_u \lambda = U_1,\ \mu_v - (\ln b)_v \mu = V_1 \qquad (2)$$

Система (1), (2) вполне интегрируема и при заданных U_1, V_1 определяет λ, μ с двумя произвольными постоянными.

На второй фокальной полости $(\bar{x})$ касательные к асимптотическим линиям u вдоль v образуют линейчатые поверхности $\bar{R}_u$, принадлежащие линейным комплексам. Аналогичное имеет место и для $\bar{R}_v$. Исходя из параметрических уравнений Террачини поверхности, у которой асимптотические линии принадлежат линейным комплексам, авторы интегрируют систему (1), (2) и исследуют частные случаи, которые могут представиться для второй фокальной полости. В случае $U_1 = V_1 = 0$ фокус $\bar{x}$ принадлежит второй директрисе Вильчинского точки x поверхности (x), асимптотические линии поверхности $(\bar{x})$ принадлежат линейным комплексам и поверхности (x), $(\bar{x})$ имеют в соответственных точках общий четырехсторонник Демулена.

Я. П. Блащк

9053. По поводу шести семейств кривых на поверхности, исследованных в предшествующей заметке академика Г. Мойсила. Хаймович (Observaţii în legătură cu cele şase familii de curbe pe o suprafaţă, studiate în nota anterioară de acad. Gr. C. Moisil. Haimovici M.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 7, 295—297 (рум.; рез. русс., франц.)

Автор находит дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, интегрируя которое, можно получить все три пары взаимно ортогональных семейств кривых, которые указаны в заметке Г. Мойсила. При этом одно семейство может быть выбрано произвольно. В качестве примера рассматривается случай, когда это семейство является изотермическим, а интеграл дифференциального уравнения ищется в виде суммы $U(u) + V(v)$. В заключение формулируются две задачи, в одной из которых предлагается исследовать случай, когда изотермическая сеть образована двумя ортогональными пучками окружностей или пучком прямых и его ортогональными траекториями, в другой — случай, когда три семейства из шести (без их ортогональных траекторий) образуют так называемую гексагональную сеть. Много опечаток. Н. И. Кованцов

9054. Конформное изгибание конгруэнций окружностей. Гейдельман Р. М., Матем. сб., 1955, 37, № 3, 435—458

Рассматривается задача изгибания в смысле Картана (см., например, Фиников С. П., Теория конгруэнций, стр. 484) конгруэнций окружностей трехмерного конформного пространства.

При рассмотрении изгибаний первого порядка оказывается, что произвольная конгруэнция окружностей конформно неизгибаема. Но существуют классы конгруэнций окружностей, допускающие изгибание первого порядка. В работе выводятся уравнения изгибания и показывается, что пары конформно наложимых конгруэнций существуют с произволом двух функций двух аргументов. Однако ввиду больших вычислительных трудностей, в работе не дается полного решения основных вопросов изгибания — выяснение геометрической структуры всех изгибаемых конгруэнций, произвола и характера изгибания для произвольной изгибаемой конгруэнции. Разбираются подробно только те случаи, в которых уравнения изгибания сильно упрощаются. Это упрощение имеет место для наиболее важных классов конгруэнций окружностей — циклических систем Рибокура (конгруэнций R) и K-конгруэнций, обладающих двумя семействами каналовых поверхностей. Для этих классов устанавливается существование изгибаемых подклассов, определяется их произвол; выделяются подклассы конгруэнций, допускающие однопараметрическое изгибание; рассматриваются различные частные случаи.

Доказывается, что по отношению к конформным изгибаниям второго порядка конгруэнции окружностей не изгибаемы.

Изучаются изгибания первого порядка конгруэнций окружностей при наличии некоторых дополнительных условий — изгибание с сохранением семейства каналовых поверхностей и изгибание с изгибанием фокальной поверхности.

Перенесение Дарбу, устанавливающее связь между геометрией трехмерного конформного пространства и геометрией четырехмерного проективного пространства с абсолютом, позволяет автору приложить полученные в работе результаты к решению соответствующих вопросов изгибания двупараметрических семейств прямых в этом пространстве. М. А. Акивис

9055. Аффинные инварианты криволинейных элементов. Демария (Invarianti affini di elementi curvilinei. Demaria D. C.), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 40—45 (итал.)

Отыскиваются совместные инварианты нескольких криволинейных элементов (и одновременно указывается геометрический смысл этих инвариантов) в следующих частных случаях:

1. Случай двух элементов третьего порядка E_3, когда оба они принадлежат одной плоскости (при частном расположении элементов такие инварианты были уже ранее найдены Santaló (Santaló L., Duke Math. J., 1947, 14, 3,). От аффинных преобразований, по отношению к которым находятся инварианты, требуется (здесь и в дальнейшем), чтобы они сохраняли элементы первого порядка E_1, принадлежащие E_3, и их центры. Имеется всего 4 независимых инварианта, из которых два определяются только E_1 и E_2 (элементы второго порядка) и два — только E_1 и E_3. Геометрический смысл (здесь и в дальнейшем) формулируется через подходящим образом определяемые простые отношения трех точек, связанных с касательными к рассматриваемым элементам кривыми второго порядка.

2. Случай двух произвольных E_3, произвольным образом расположенных в пространстве. Здесь имеется два независимых инварианта.

3. Случай трех произвольных E_2, произвольным образом расположенных в пространстве. Здесь имеется 9 независимых инвариантов, из которых три зависят только от E_1 и три — от E_1 и соприкасающихся плоскостей элементов. Упомянутый случай рассматривался Керепом (Cherep R., Gazeta de Matematica, 1951, № 50, Dezembro, Lisboa), однако последний допустил ряд неточностей, которые в реферируемой работе подвергаются исправлению. Н. И. Кованцов

9056. О составных криволинейных элементах. Терраччини (Sugli elementi curvilinei composti. Terracini Alessandro), Atti Accad. sci. Torino. Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, 88, № 1, 7—15 (итал.)

Составным криволинейным элементом $E(p_1, p_2, \ldots, p_n; m)$ в проективном пространстве S_{n+1} $(n \geqslant 2)$ называется совокупность ветвей кривых, допускающих параметризацию:

$$x_i = \sum_{k=0}^{m} a_{i,\, i+k} x^{p_i+k} + [p_i + m + 1], \quad (i = 1, \ldots, n), \quad (1)$$

где $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_n$ — неоднородные проективные координаты, $a_{i,\, i+k}$ — константы, одни и те же для всех ветвей, $1 < p_1 < p_2 < \ldots p_n$, $a_{ii} \neq 0$ и $m \geqslant 0$ — целое число. Для обыкновенных ветвей $p_i = i + 1$ и элемент обозначается $E_{2,\, m}$.

Пара элементов $E_{2,\,1}$, содержащих общий элемент $E_{2,\,0}$, называется автодуальной, если их двойственные инварианты $\gamma_{ij} = z_i / z_j$ и $\gamma^*_{ij} = z^*_i / z^*_j$, введенные автором ранее (РЖМат, 1955, 949), равны. Аналитически это приводит к двум видам зависимостей между z^*_i и z_i при $n = 2h$ и к двум видам зависимостей между z^*_i и z_i при $n = 2h + 1$. Геометрически это значит, что при $n = 2h$ в одном случае можно установить с произволом в $h^2 + h + 1$ параметров поляритет между точками кривой (1) и огибающими ее гиперплоскостями, в другом — вместо поляритета получается нульсистема, определяемая с произволом в h^2 параметров; при $n = 2h + 1$ в обоих случаях получается поляритет, но с произволом в первом случае в $(h+1)^2 + 1$ параметров, а во втором в $(h+1)^2$ параметров.

Р. Н. Щербаков

9057. О минимальной модели многообразия элементов 2-го порядка проективного пространства S_r. Лонго (Sul modello minimo della varietà degli elementi del 2° ordine di S_r. Longo Carmelo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 6, 614—618 (итал.)

Полностью решается проблема минимального представления элементов 2-го порядка E_2 проективного пространства S_r при $r > 2$; для $r = 2$ проблема была решена Герарделли (Gherardelli G, Rend. Accad. d'Italia,

1941, 7, 821). Минимальная модель в этом случае оказывается бирационально эквивалентной, без исключения, топологическому произведению многообразия элементов первого порядка E_1 пространства S_r на многообразие соприкасающихся плоскостей всех кривых многообразия Веронезе V_r^{2r} (последнее определяется как совокупность элементов с координатами $\nu^{ik} = x^i x^k$, где x^i, x^k — координаты точки S_r).

Автор преодолевает трудности, возникающие в связи с существенным различием при $r > 2$ элементов перегиба и заострения, вводя соответствующим образом координаты элемента E_2 (при $r = 2$ аффинные координаты для представления E_2 были введены Штуди и Энгелем, (Study E., Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1901, 53, 338; Engel F., там же, 1902, 54, 17). Н. И. Кованцов

9058 Д. Расслояемые пары комплексов. Бикматова Г. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1956

ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

9059. Изометрическое погружение неограниченно широкого евклидова листа Мёбиуса в сферическое, параболическое или гиперболическое пространство четырех измерений. Бланута (Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace sphérique, parabolique ou hyperbolique à quatre dimensions. Blanuša Danilo), Bull. internat. Acad. yougosl. sci. et. beaux-arts, 1954, № 12, 19—23 (франц.)

Автор представляет неограниченный двумерный лист Мёбиуса как поверхность четырехмерного сферического, параболического или гиперболического пространства, так что метрика этой поверхности будет евклидовой. Поверхность в любом случае свободна от особенности и различные точки никогда не совпадают в пространстве погружения. O. Varga

9060. Подпространства римановых пространств. Блум (Subspaces of Riemannian spaces. Blum Richard), Canad. J. Math., 1955, 7, № 4, 445—452 (англ.)

Как известно, условием вложения риманова пространства V_n с линейным элементом $ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j$ в риманово пространство V_N с линейным элементом

$$dS^2 = A_{IJ}dX^I dX^J$$

служат уравнения Гаусса и Петерсона — Кодацци (Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, И. Л., 1948)

$$G_{ijkl} \equiv r_{ijkl} - (b_{\alpha|ik}b_{\alpha|jl} - b_{\alpha|il}b_{\alpha|jk}) - \\ - R_{IJKL}X^I_{,i}X^J_{,j}X^K_{,k}X^L_{,l} = 0 \qquad (1)$$

$$C_{\alpha|ijk} \equiv b_{\alpha|i,\,k} - b_{\alpha|ik,\,j} - (t_{\beta\alpha|k}b_{\beta|ij} - t_{\beta\alpha|j}b_{\beta|ik}) + \\ + R_{IJKL}\xi^I_\alpha X^J_{,i}X^K_{,j}X^L_{,k} = 0 \qquad (2)$$

$$K_{\alpha\beta|ij} \equiv t_{\alpha\beta|i,\,j} - t_{\alpha\beta|j,\,i} + (t_{\gamma\alpha|i}t_{\gamma\beta|j} - t_{\gamma\alpha|j}t_{\gamma\beta|i}) + \\ + a^{kl}(b_{\alpha|ki}b_{\beta|lj} - b_{\alpha|kj}b_{\beta|li}) + \\ + R_{IJKL}\xi^I_\alpha\xi^J_\beta X^K_{,i}X^L_{,j} = 0, \qquad (3)$$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, \nu$, где $\nu = N - n$.

Рассматривается вопрос о числе независимых уравнений (1), (2), (3).

Если уравнения (1) удовлетворяются системой решений $b_{\alpha|ij}$, для которой ранг матрицы линейной системы:

$$(A)\ G_{ijklm} \equiv -b_{\alpha|ik}C_{\alpha|jlm} - b_{\alpha|il}C_{\alpha|jmk} - b_{\alpha|im}C_{\alpha|jkl} \\ + b_{\alpha|jk}C_{\alpha|ilm} + b_{\alpha|jl}C_{\alpha|imk} + b_{\alpha|jm}C_{\alpha|ikl} = 0;$$

$$(B)\ C_{\alpha|ijkl} \equiv -b_{\beta|ij}K_{\beta\alpha|kl} - b_{\beta|ik}K_{\beta\alpha|lj} - b_{\beta|il}K_{\beta\alpha|jk} = 0$$

имеет максимальное значение, то а) для $0 \leqslant \nu \leqslant (1/8)\,n\,(n-2)$ все уравнения (2) и (3) являются следствием уравнений (1), б) для $(1/8)n\,(n-2) \leqslant \nu \leqslant (1/2)\,n(n-1)$ система $(1/8)\,n\,(n^2-1)\,[\nu - (1/8)\,n\,(n-2)]$ уравнений (2) является независимой. Остальные уравнения (2) и все уравнения (3) являются следствием указанных выше уравнений и уравнений (1).

Если уравнения (1) удовлетворяются системой решений $b_{\alpha|ij}$, для которых ранги r и r' матриц (A) и (B) имеют максимальные значения, то $(1/3)\,\nu n\,(n^2-1) - r$ уравнений (2) и $(1/4)\nu\,(\nu-1)\,n\,(n-1) - r'$ уравнений (3) независимы.

Если V_N является пространством постоянной кривизны K_0 и $N = n + 1$, то уравнения (1), (2), (3) сводятся к следующим:

$$G_{ijkl} \equiv r_{ijkl} - (b_{ik}b_{jl} - b_{il}b_{jk}) - \\ - K_0\,(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}) = 0, \qquad (1')$$

$$C_{ijk} \equiv b_{ij,\,k} - b_{ik,\,j} = 0. \qquad (2')$$

Обозначим через r ранг матрицы

$$\| r_{ijkl} - K_0\,(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}) \|,$$

в которой i указывает номер строки, а остальные три индекса — номер столбца. Тогда при $r = 0$ V_n также имеет постоянную кривизну K_0, случай $r = 1$ невозможен. Если $r \geqslant 4$, то все уравнения (2′) являются следствием уравнений (1′). Если $r = 3$, то пять уравнений (2′) независимы, остальные являются следствием этих пяти и уравнений (1′). Наконец, при $r = 2$ независимы $3n - 4$ уравнений (2′), остальные уравнения (2′) являются следствием указанных и уравнений (1′).

А. С. Феденко

9061. О плотностях в двумерном обобщенном пространстве. Уэно (On the densities in a two-dimensional generalized space. Ueno Seitarô), 九州大學理學部紀要, Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem. Fac. Sci. Kyûsyû Univ., 1955 **A9**, № 1, 65—77 (англ.)

Рассматривается двумерное финслерово пространство, в котором длина дуги задается формулой

$$s = \int F\,(x,\ dx).$$

Следуя Картану, можно ввести фундаментальный тензор

$$g_{ij}\,(x,\ x') = \partial^2\,(F\,(x,\ x')^2) / 2\partial x'^i \partial x'^j$$

и ковариантный дифференциал вектора X^i:

$$\delta X^i = X^i_{,k}dx^k + X^i_{;k}\delta x'^k, \text{ где}$$

$$\delta x'^i = dx'^i + G^i_k\,(x,\ x')\,dx^k,$$

$$X^i_{,k} = \partial X^i/\partial x^k + X^j\Gamma^{*i}_{jk}$$

$$X^i_{;k} = \partial X^i/\partial x'^k + X^j C^i_{jk},$$

а G^i_k, Γ^{*i}_{jk}, C^i_{jk} определенным образом выражаются через g_{ij}.

Рассмотрим единичное векторное поле $a\,(x)$ и построим ортогональное ему единичное векторное поле

$b(x)$. Плотностью векторного поля $a(x)$ называется

$$dG = g_{ij}a^i_{,k}b^j g_{em}\, b^e\, [dx^k dx^m], \quad (x' \equiv a).$$

Доказывается, что $dG = 0$, если $a(x)$ есть поле единичного касательного вектора к геодезическим. Вводится понятие сдвига (displacement), при котором $a(x)$ перемещается параллельно вдоль геодезической с направляющим элементом $(x, a(x))$ из точки x в бесконечно близкую точку $\bar{x}$, причем опорные линейные элементы x' и $\bar{x}'$ в точках x и $\bar{x}$ также параллельны. Плотность векторного поля инвариантна при сдвиге.

Рассмотрим на каждой геодезической с направляющим элементом $(x, a(x))$ ориентированный сегмент и через s обозначим расстояние от центра (x) направляющего элемента до начала сегмента. Кинематической плотностью геодезических сегментов называется $dK = 2[dGds]$, где dG — плотность векторного поля $a(x)$ dK не зависит от выбора поля.

Далее дается геометрическая интерпретация кинематической плотности. А. С. Феденко

9062. Локально евклидовы пространства линейной аффинной связности A_2. Постелнику (Spaţii cu conexiune afină liniară A_2 local euclidiene. Postelnicu Tiberiu), Rev. Univ. «C. I. Parhon», si Politehn. Bucureşti., Ser. ştiinţ. natur., 1954, № 4—5, 101—131 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматривается 2-мерные локально евклидовы пространства аффинной связности, коэффициенты связности которых являются линейными функциями координат. Эффективно находятся все «канонические» формы коэффициентов связности рассматриваемых пространств и изучается вопрос о приведении коэффициентов связности к этим каноническим видам. Проблема эквивалентности рассматривается как в малом, так и в целом. Б. А. Розенфельд

9063. Об одной теореме Б. Сегре. Дебеве (Sur un théorème de B. Segre. Debever R.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **19**, № 1—2, 26—27 (франц.)

Используя некоторые результаты Фиалкова (Trans. Amer. Math. Soc., 1939, 45, 443—473), автор дает новое доказательство теоремы Сегре (Rend. dei Lincei, 1949, 7, 12—15): Если риманово пространство V_n конформно отображается на евклидово пространство S_n и при этом геодезическим V_n соответствуют кривые S_n с постоянной первой кривизной, то V_n является пространством постоянной кривизны. Г. И. Кручкович

9064. Необходимые и достаточные условия существования параллельных гиперповерхностей. Бхаттачария (The necessary and sufficient conditions for the existence of parallel hypersurfaces. Bhattacharya Sambhu Nath), Sci. and Cultura, 1955, **20**, № 10, 501 (англ.)

Ищутся необходимые и достаточные условия существования параллельных поверхностей (Схоутен И. А. и Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, 1948, 2, 43).

Примечание референта. Можно только догадываться, в каком пространстве производится рассмотрение. Необходимое и достаточное условие не сформулировано. Утверждение: «если $f = c_1$ и $f = c_2$ есть уравнения параллельных поверхностей, то $c_2 - c_1$ равно длине отрезка геодезических, заключенного между поверхностями»,— без дополнительных условий неверно. В. И.Ведерников

9065. Об инвариантах пространств A_2 с линейной связностью. Врэнчану (Asupra invarianţilor spatiilor A_2 cu conexiune liniara. Vrănceanu G.), Bul. ştiinţ., Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 4, 779-787 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются A_2 с линейной связностью, т. е. двухмерные пространства A_2 аффинной связности, коэффициенты связности которых в некоторой системе координат определяются формулами вида

$$\Gamma^i_{jk} = A^i_{jkl}x^l + C^i_{jk}, \qquad (1)$$

где A^i_{jkl}, C^i_{jk} — постоянные величины. A^i_{jkl} определяют (относительно группы аффинных преобразований переменных x^1, x^2) тензор трижды ковариантный и один раз контравариантный. Показывается, что в A_2 можно ввести симметрическую тензорную плотность V_{ijkl}, определенную формулами

$$V_{1111} = A^2_{111},\ V_{2222} = -A^1_{222},\ V_{1112} =$$

$$= \frac{1}{4}(A^2_{[112]} - A^1_{111}),\ V_{1222} =$$

$$= \frac{1}{4}(A^2_{222} - A^1_{[122]}),$$

$$V_{1122} = \frac{1}{6}(A^2_{[122]} - A^1_{[112]})$$

Далее выясняется, что V_{ijkl}, $a_{ij} = A^\sigma_{\sigma ij}$, $b_{ij} = A^\sigma_{i\sigma j}$, $c_{ij} = A^\sigma_{ij\sigma}$, $(a_{[12]} + c_{[12]} = b_{[12]})$ полностью определяют однородную часть связности (1) (т. е. тензор A^i_{jkl}). В заключение дается для A_2 классификация в зависимости от вещественности некоторых четырех прямых, определенных указанной выше тензорной плотностью. И. П. Егоров

9066. О пространствах V_n с просто транзитивной группой. Врэнчану Г., Ж. матем. и физ. Акад. РНР, 1954, **3**, 54—62

Рассматриваются собственно римановы пространства V_n, допускающие просто транзитивную группу движений $\mathfrak{G}_n$. Эти пространства характеризуются наличием системы n ортогональных конгруэнций μ^i_h, в которой коэффициенты вращения γ^h_{kl} постоянны (Vrănceanu G., Bul. de la Soc., de Scient. Cluj., 1932, 6, 429—445). Линейный элемент V_n, отнесенного к системе конгруэнций μ^i_h, приводится к следующему виду:

$$ds^2 = \sum_1^n (ds^h)^2, \quad ds^h = \lambda^h_i\, dx^i, \quad \lambda^h_i \mu^i_l = \delta^h_l;$$

билинейные коварианты форм ds^h определяются формулами $\Delta s^h = c^h_{kl} ds^k \delta s^l$ $(\Delta s^h = \delta ds^h - d\delta s^h)$; причем $c^h_{kl} = \gamma^h_{kl} - \gamma^h_{lk}$, $\gamma^h_{kl} = {}^1/_2\,(c^h_{kl} + c^k_{lh} + c^l_{kh})$ являются структурными константами просто транзитивной группы $\mathfrak{G}_n$ (группа, сохраняющая n форм Пфаффа ds^h). Показывается, что если структурный вектор c^h_{hs} не равен нулю, то линии тока этого векторного поля определяют геодезическую конгруэнцию в V_n. Необходимым условием для того, чтобы форма Риччи $R_{bd}ds^b ds^d$ была определенно положительной, является совпадение группы $\mathfrak{G}_n$ со своей производной группой. Если $\mathfrak{G}_n$ — полупростая, то конгруэнции, по отношению к которым тензор Картана $(c_{ij} = c^\tau_{i\sigma}c^\sigma_{j\tau})$ приводится к канонической форме, являются геодезическими конгруэнциями. Далее рассматриваются свойства V_n и соответствующих $\mathfrak{G}_n$ в случае, когда последняя является соответственно разрешимой и неразрешимой. Если неразрешимая группа $\mathfrak{G}$

совпадает со своей производной группой и ее максимальная разрешимая подгруппа есть $\mathfrak{G}_2(\mathfrak{G}_3)$, то эта подгруппа $\mathfrak{G}_2(\mathfrak{G}_3)$ является абелевой (нулевого ранга).

И. П. Егоров

9067. **О пространствах V_n с просто транзитивной группой. Врэнчану** (Sur les espaces V_n à groupe simplement transitif. Vrănceanu G.), Rev. math. et phys. (Bucureşti), 1954, 2, 51—58 (франц.)

Излагается содержание статьи автора (реф. 9066).

9068. **О римановых пространствах и контактных преобразованиях. Сугури, Накаяма** (Note on Riemannian spaces and contact transformations. Suguri Tsuneo, Nakayama Shigeru), Tensor, 1955, 5, № 1, 1—16 (англ.)

Л. П. Эйзенхарт показал (Eisenhart L. P., Ann. Math., 1948, 49, 227—254), что при изучении однородных контактных преобразований риманова пространства V_n естественно возникает некоторое финслерово пространство F_n. Следуя его методу, авторы пришли к более общему пространству Финслера. Н. С. Синюков

9069. **О группах конформных преобразований в сферически симметрическом пространстве — времени. Такэно** (On groups of conformal transformations in spherically symmetric space-times. Takeno Hyôitirô), Tensor, 1955, 5, № 1, 23—28 (англ.)

Сферически симметрическое пространство — время автор определяет как четырехмерное риманово пространство S, метрика которого имеет в некоторой системе координат вид

$$ds^2 = -A(r,\ t)\,dr^2 - B(r,\ t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + C(r,\ t)\,dt^2;$$

A, B, $C>0$. Все такие метрики приводятся к двум каноническим формам S_{I} при $B=r^2$ и S_{II} при $B=1$. Оператор $X(\xi^i)$ порождает в римановом пространстве конформное преобразование, если $\xi^k\partial_k g_{ij} + g_{ik}\partial_j\xi^k + g_{jk}\partial_i\xi^k = \psi g_{ij}$.

Непосредственно интегрируя эти уравнения, автор находит группы конформных преобразований в указанных пространствах и получает их классификацию: 1) в конформно евклидовом случае допускается конформная группа, зависящая от 15 параметров; 2) если S конформно специальному пространству S_{20}, введенному автором ранее и являющемуся обобщением конформно евклидова S, то полная конформная группа G_6; 3) полная группа G_4 допускается для S_{I}, если A и C не зависят от t или $A=A(t)$, $C=r^2$, для S_{II}, если $A=A(t)$, $C=1$ или $A=1$, $C=C(r)$; 4) в остальных случаях допускается только группа G_3 движений в переменных θ, φ.

Указывается, что эти результаты обобщаются на n-мерное сферически симметрическое пространство — время с метрикой $ds^2 = -A(r,t)\,dr^2 + C(r,t)\,dt^2 - B(r,t)\,ds_1^2$, где ds_1^2 — метрика постоянной кривизны $K=1$. Библ. 16 назв. Г. И. Кручкович

9070. **О частично проективных пространствах аффинной связности. Врэнчану** (Sur les espaces à connexion affine partiellement projectifs. Vrănceanu Gheorghe), Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 3, 283—286 (франц., рез. русс.)

Пространство аффинной связности A_n называется частично проективным порядка $n-p$ ($p>1$), если оно допускает такую систему координат (x^i), в которой среди $n-1$ уравнений геодезических $n-p$ уравнений являются линейными относительно $x^1, x^2, \ldots x^n$. Частично проективное пространство порядка $n-p$ называется пространством Кагана, если $n-p$ гиперплоскостей, определяющихся линейными уравнениями геодезических, проходят через фиксированную $p-2$-мерную плоскость. Автором ранее доказано (Lecţii de geom. dif., II, 1951), что коэффициенты связности пространства Кагана ($n-p$) раз проективного можно определить по формуле $\Gamma^\alpha_{ij} = \delta^\alpha_i\varphi_j + \delta^\alpha_j\varphi^i$ ($\alpha = p,\ p+1,\ \ldots,\ n$), ($\Gamma^\alpha_{ij}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, произвольны), обобщающей соответствующую формулу Вейля для проективно евклидова пространства. Показывается, что A_n тогда и только тогда проективно евклидово, если всякая гиперплоскость содержит максимальное число ∞^{2n-4} геодезических. Пространство A_n тогда и только тогда является $n-p$ раз проективным пространством Кагана, если всякая гиперплоскость некоторого семейства ∞^{n-p} «параллельных» гиперплоскостей обладает максимальным числом ∞^{2n-4} геодезических. Далее выписывается необходимое условие (дифференциального характера) для частично проективного некагановского пространства.

И. П. Егоров

9071. **Заметка о конформной теории подпространств. Такано, Имаи** (Note on the conformal theory of subspaces. Takano Kazuo, Imai Tyuiti), Tensor, 1954, 3, 108—118

Пусть V_m, $\overline{V}_m$ — конформно эквивалентные римановы пространства, у которых соответствующие метрические тензоры $g_{\alpha\beta}$, $\overline{g}_{\alpha\beta}$ в координатной системе $\{y^\alpha\}$ преобразуются согласно равенству $\overline{g}_{\alpha\beta} = e^{2\sigma}g_{\alpha\beta}$, и пусть V_n, $\overline{V}_n$ ($n<m$) с метрическими тензорами g_{ij}, $\overline{g}_{ij}$ в координатной системе $\{x^i\}$ соответствуют соответственно подпространствам V_m и $\overline{V}_m$.

Доказывается теорема: (A) Коэффициенты связности

$$\Pi^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} + \delta^\alpha_\beta p_\gamma + \delta^\alpha_\gamma p_\beta - g_{\beta\gamma}g^{\alpha\delta}p_\delta$$

и

$$\Pi^i_{jk} = \left\{\begin{matrix}i\\ jk\end{matrix}\right\} + \delta^i_j p_k + \delta^i_k p_j - g_{jk}g^{il}p_l$$

будут конформно инвариантны, если p_α есть вектор, удовлетворяющий $p_\alpha - \overline{p}_\alpha = \partial\sigma/\partial y^\alpha$ и $p_i = p_\alpha\,\partial y^\alpha/\partial x^i$. Показывается, что тогда конформные коэффициенты связностей, определенных референтом (Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 56, 309—433), могут быть получены подходящей специализацией p_α в (A). Также дается другое доказательство конформного характера производного тензора E_{ij}, впервые определенного референтом. Доказательство теоремы (A) опирается на использование конформного тензора плотности (Thomas T. Y.) и конформных коэффициентов связности (Thomas J. M.). Тот же результат может быть также получен использованием доказательства, данного в цитированной статье референтом. (На стр. 333 надо вычеркнуть специальное определение η_α, данное в (8.10), и положить там η_α (так же как и p_α настоящей статьи), равным вектору, удовлетворяющему (8.9). В остальном доказательство референта остается неизменным.) A. Fialkow

Перевод из Math. Revs., 1954, 15, № 10, 897.

9072. **4-сплетения и сеть Мёбиуса. Арци** (4-webs and Moebius'net. Artzy Rafael), Riveon Lematematika, 1954, 7, 1—9 (иврит; рез. англ.)

Автор рассматривает 4-сплетения, состоящие из трех семейств параллельных линий и пучка линий, проходящих через одну точку. Линии определены как множества точек, удовлетворяющие аксиомам инцидентности,

параллельности и порядка. Сетка определяется как множество точек и линий, принадлежащих сплетению и содержащих все линии, проходящие через пары точек множества так же, как и все точки пересечения линий, принадлежащих множеству. На проективной плоскости мёбиусова сетка — минимальная. В 3-сплетении (состоящем из трех семейств параллельных линий), где имеет силу постулат замкнутости шестиугольника Брианшона(-Schliessungspostulat), минимальная сетка находится во взаимнооднозначном соответствии с решеткой всех пар целых чисел. По аналогии с этими результатами автор получает достаточные (и в некотором отношении также необходимые) условия для минимальной сетки в 4-сплетении. Эти условия состоят из упомянутого постулата замкнутости шестиугольника и другого постулата замкнутости (слишком запутанного, чтобы приводить его здесь), которые заменяют некоторые достаточные условия типа Дезарга, полученные автором в предыдущей работе (диссертация, Hebrew Univ. Math. Revs, 1945, 8, 343). Точки минимальной решетки, полученные таким образом, находятся во взаимнооднозначном соответствии с множеством всех пар рациональных чисел. Наконец, автор рассматривает множество точек и линий, полученных из 4-сплетения посредством присоединения к нему всех точек и линий, образованных рациональным перенесением, и линии в бесконечности. Он показывает, что минимальная, сетка в этом случае может быть охарактеризована некоторым постулатом типа Дезарга. J. Levitzki

Перевод из Math. Revs., 1954, 15, № 6, 550—551

9073. Теория подпространств в геометрии, основанной на кратном интеграле. I. Метрический тензор и теория связностей. Тонооока (Theory of subspaces in a geometry based on a multiple integral.I. Metric tensor and theory of connections. Tonooka Keinosuke), Tensor, 1954, 3, 75—83

В n-мерном многообразии X_n с координатами точек $x^1, \ldots, x^n$ задается k-мерная поверхность S_k с помощью параметрических уравнений $x^i = x^i(u^\alpha)$, $i = 1, \ldots, n$; $\alpha = 1, \ldots, k$. Величины $p^i_\alpha = \partial x^i / \partial u^\alpha$, $p^i_{\alpha\beta} = \partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta$ определяют поверхностный элемент S_k второго порядка. Многообразие всех k-мерных поверхностных элементов второго порядка обозначается $X^{(2)}_n$. Автор рассматривает промежуточную поверхность $S_m (n > m > k)$ многообразия X_n, заданную параметрическими уравнениями $x^i = x^i(y^a), a, b = 1, \ldots, m$, в которую S_k, заданная уравнениями $y^a = y^a(u^\alpha)$, погружена таким образом, что y^a, $q^a_\alpha = \partial y^a / \partial u^\alpha$, $q^a_{\alpha\beta} = \partial^2 y^a / \partial u^\alpha \partial u^\beta$ являются элементами пространства $X^{(2)}_m$. $X^{(2)}_m$ и $X^{(2)}_n$ связаны соотношениями

$$p^i_\alpha = B^i_a q^a_\alpha, \quad p^i_{\alpha\beta} = B^i_a q^a_{\alpha\beta} + B^i_{ab} q^a_\alpha q^b_\beta,$$

где $B^i_a = \partial x^i / \partial y^a$, $B^i_{ab} = \partial^2 x^i / \partial y^a \partial y^b$. Это множество соотношений определяет множество параметрических уравнений $X^{(2)}_m$ в $X^{(2)}_n$. Метрические тензоры и параметры связности выводятся из основной функции $F(x^i, p^i_\alpha, p^i_{\alpha\beta})$, устанавливаются также соотношения между ними. E. T. Davies

Перевод из Math. Revs., 1954, 15, № 10, 897

9074. Метрика в пространстве путей. Косамби (The metric in path-space. Kosambi D. D.), Tensor, 1954, 3, 67—74 (англ.)

Согласно теореме Уитнея (Whitney, Ann. Math., 1936, (2), 37, 645—680) окрестность в пространстве путей может быть снабжена римановой метрикой. Однако соотношение между метрикой и путями нам кажется недостаточно ясным. Доказывается, что посредством подходящей проективной замены параметра пути симметрической аффинной связности могут быть сделаны геодезическими. Имеется еще одна теорема, касающаяся отображений путей на прямые линии. J. A. Schouten

Перевод Math. Revs, 1954, 15, № 10, 898

9075. О представлении общих аффинных путей. Такано (On a representation of general affine paths. Takano Kazuo), Tensor, 1955, 4, № 3, 129 - 134 (англ.)

Пусть в V_N неголономное V^n_N задано n полями контравариантных векторов B^A_i, а его оснащение V^{N-n}_N определено $N-n$ полями векторов C^A_p ($A = 1, \ldots, N$; $i = 1, \ldots, n$; $p = n+1, \ldots, N$). Если в V_N введена аффинная связность Γ^A_{BC}, то известным путем получаются ковариантные дифференциалы и производные неголономных компонент векторов, лежащих в V^n_N и в V^{N-n}_N. В случае симметрической связности изучаются уравнения проекций аффинных путей на V^n_N. Далее, для случая $N = 2n$ установлена возможность выбора такого репера, в котором

$$B^A_j = (\delta^i_j, B^p_j), \quad C^A_p = (0, \delta^r_p),$$
$$B^j_A = (\delta^j_i, 0), \quad C^p_A = (-B^p_j, \delta^p_r).$$

Этот репер сохраняет свои свойства при следующих преобразованиях координат: $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$; $x^{(n+i)'} = (\partial x^{i'} / \partial x^j)\, x^{(n+j)}$. Если еще положить $\delta x^{n+i} = (dx)^{n+i}$, где δ — символ ковариантного дифференциала и $x^{n+i} = dx^i / dt$, то в рассматриваемом репере уравнения проекций обычных аффинных путей будут иметь следующий вид: $d^2x^i / dt^2 + H^i(x^j, dx^j / dt) = 0$; отсюда следует, если учесть произвол в задании функций H^i, что линии общей теории путей в n-мерном пространстве можно представить как рассмотренные выше проекции. Б. Л. Лаптев

9076. О дифференциальной геометрии пространства симметрических матриц. Далла Вольта (Sulla geometria differenziale dello spazio delle matrici simmetriche. Dalla Volta Vittorio), Ann. mat. pura ed appl., 1954, 37, 291—332 (итал.)

В многообразие комплексных симметрических матриц p-го порядка $Z = X + iY$ вводится вещественная риманова метрика, в которой квадрат расстояния между матрицами Z и $Z + dZ$ равен следу матрицы $Y^{-1}dZY^{-1}d\bar{Z}$. Это пространство $p(p+1)$-мерно и является келеровым (А-пространством в смысле П. А. Широкова) и симметрическим в смысле Э. Картана. Движения этого пространства имеют вид $Z' = (ZC + D)^{-1} \times (ZA + B)$, где A, B, C, D — вещественные матрицы p-го порядка, такие, что вещественные матрицы $2p$-го порядка $\begin{pmatrix} DB \\ CA \end{pmatrix}$ являются симплектическими матрицами (при $p = 1$ это пространство изометрично дважды взятой плоскости Лобачевского и получается из плоскости комплексного переменного с помощью интерпретации Пуанкаре на верхней и нижней полуплоскостях). В пространстве имеются вполне геодезические p-мерные поверхности нулевой кривизны, в пространстве направлений, выходящих из одной точки рассматриваемого пространства, касательные пространства к этим поверхностям, проходящим через данную точку, определяют $(p-1)$-мерные плоскости, образующие алгебраическую конгруэнцию. Изучается фокальное многообразие этой конгруэнции, с помощью чего выясняются

закономерности распределения двумерных площадок нулевой кривизны, проходящих через точку рассматриваемого пространства и изображающихся в указанном пространстве направлений прямыми.

Б. А. Розенфельд

9077. **О компактных многообразиях с несимметричной метрической связностью. О ц у к и** (Note on compact manifolds with non-symmetric metric connections. O t s u k i T.), Math. J. Okayama Univ., 1955, 4, № 2, 103—114 (англ.)

Пусть S_n — компактное многообразие с несимметрической метрической связностью. Поле кососимметрического вектора $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ называется псевдогармоническим, если

$$\varphi_{i_1 \ldots i_{p+1}} [dx^{i_1} \ldots dx^{i_p+1}] = 0,$$

$$g^{jk} \varphi_{j i_1 \ldots i_{p-1}/k} [dx^{i_1} \ldots dx^{i_p-1}] = 0,$$

где

$$\varphi_{i_1 \ldots i_{p+1}} = (-1)^p \{\varphi_{i_1 \ldots i_p/i_{p+1}} - \sum_{s=1}^{p} \varphi_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{p+1} i_{s+1} \ldots i_p/i_s}\},$$

g_{ij} — метрический тензор S_n, «|» означает ковариантное дифференцирование относительно связности S_n, [ ] — символ косого произведения (Bochner S., Ann. Math., 1949, 50, 77—93). Далее, поле кососимметрического вектора $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ называется псевдокиллинговым (Bochner S., Yano K., Ann. Math., 1952, 56, 504—519), если $\varphi_{i_1 \ldots i_p/j} = -\varphi_{i_1 \ldots i_{s-1} j i_{s+1} \ldots i_p/i_s}$ $(s = 1, \ldots, p)$.

В статье получены (в одних случаях необходимые, в других — необходимые и достаточные) условия существования в S_n псевдогармонических и псевдокиллинговых полей, содержащие как объекты S_n, так и компоненты соответствующих векторных полей.

Н. С. Синюков

9078. **Об однородных группах голономии пространств аффинной связности и римановых пространств. Б е р ж е** (Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. B e r g e r M a r c e l), Bull. Soc. math. France, 1955, **83**, № 4, 279—330 (франц.)

Пусть V_m^h — риманово пространство произвольной сигнатуры, Ψ — однородная группа голономии и σ — сокращенная (restreint) однородная группа голономии (σ соответствует циклам, гомотопным нулю). Исследуется случай неприводимой группы σ.

Одним из основных результатов является следующий:

Т е о р е м а. Если V_m^h класса C^3, не локально симметрическое, то σ может иметь вид: для V_m^h: $SO^h(m)$, $m \geqslant 2$; для V_{2n}^{2h}: $T^1 \times SU^h(n)$, $SU^h(n)$, $n \geqslant 2$, для V_{2n}^n: $SO(n, C)$, $n \geqslant 3$; для V_{4n}^{4h}: $Sp(1) \times Sp^h(n)$, $Sp^h(n)$, $n \geqslant 2$; для V_{4n}^{2n}: $SO^*(2n)$, $n \geqslant 3$; для V_7^3: G_2^*; для V_7^0: G_2; для V_8^4: $\mathrm{Spin}^0(7)$; для V_8^0: $\mathrm{Spin}(7)$; для V_{14}^7: $G_2(C)$; для V_{16}^8: $\mathrm{Spin}(7, C)$, $\mathrm{Spin}^0(9)$, $\mathrm{Spin}^3(9)$; для V_{16}^0: $\mathrm{Spin}(9)$.

Метод исследования опирается на результаты Э. Картана о линейных неприводимых группах. Автор утверждает, что его метод применим и к случаю локально симметрических пространств.

Далее исследуются группы σ пространств аффинной связности без кручения. Полученные результаты применяются для отыскания ковариантно постоянных внешних форм пространств V_m^h. Для односвязных пространств V_m^h, перечисленных в вышеприведенной теореме, возможны следующие нетривиальные ковариантно постоянные внешние формы: для $\sigma = T^1 \times SU^h(n)$: одна 2-форма; для $\sigma = SU^h(n)$, $SO^*(2n)$: одна 2-форма и две n-формы (соответственно $2n$-формы); для $\sigma = Sp^h(n)$: три 2-формы; для $\sigma = SO(n, C)$ (соответственно $\mathrm{Spin}(7, C)$, $G_2(C)$): две n (соответственно 8,7)-формы; для остальных пространств возможны только тривиальные формы. Наконец, исследуется группа Ψ риманова пространства V_m знакоопределенной метрики.

Т е о р е м а. Пусть V_m — ориентируемое риманово пространство класса C^3, не локально симметрическое, не локально приводимое. Утверждается, что $\sigma = \Psi$ в следующих случаях: 1) m нечетное; 2) $\sigma = U(2n+1)$; 3) $\sigma = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Spin}(7)$, $\mathrm{Spin}(9)$, G_2.

А. С. Феденко

9079. **Инфинитезимальные конформные преобразования некоторых компактных римановых многообразий. Л и х н е р о в и ч** (Transformations infinitésimales conformes de certaines variétés riemanniennes compactes. L i c h n e r o w i c z A n d r é), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 12, 726—729 (франц.)

Пусть V_m — риманово многообразие класса C^∞, компактное и ориентируемое. Инфинитезимальное конформное преобразование задается векторным полем X, таким, что: $\theta(X)\, g = a \cdot g$, где g — метрический тензор, a — скаляр. Ввиду естественного скалярного произведения, определяемого метрикой, можно задавать инфинитезимальное преобразование с помощью дифференциальной формы ξ первого порядка.

Выводится условие конформности такого преобразования. Пусть d — оператор дифференцирования дифференциальных форм, δ — сопряженный оператор, Δ — оператор Лапласа; K — оператор, действующий на формах первого порядка: $\alpha_i \to 2R_{ij}\alpha^j$, где R_{ij} — тензор Риччи. Для того, чтобы форма ξ определяла конформное инфинитезимальное преобразование, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\Delta\xi + (1 - 2/m)\, d\delta\xi = K\xi.$$

Для того, чтобы это преобразование было инфинитезимальной изометрией, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\Delta\xi = K\xi, \quad \delta\xi = 0.$$

В случае пространств Эйнштейна когда $R_{ij} = \lambda_0 g_{ij}/2$ ($\lambda_0 = \mathrm{const} > 0$, $\lambda_1 = (\lambda_0/2)(m/m-1)$) оказывается, что λ_0 и λ_1 — наименьшие собственные значения оператора Δ. Формы, соответствующие этим собственным значениям, порождают пространства инфинитезимальных конформных преобразований L_0 (изометрии) и L_1, прямая сумма которых является алгеброй Ли всех этих преобразований.

Если пространство Эйнштейна E_{2n} $(n > 1)$ псевдокелерово, то всякое конформное инфинитезимальное преобразование является инфинитезимальным автоморфизмом (квазикомплексной) структуры многообразия. Подробных доказательств не приводится.

И. З. Розенкноп

9080. **Размерностное дифференцирование гармонических тензоров для вариаций римановой метрики. Н а к а э** (Dimensional differentiation of harmonic tensors for variations of Riemannian metric. N a k a e T a t u o), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1955, A 29, № 1, 43—53 (англ.)

Вводится понятие абстрактной размерности тензоров и скаляров в собственно римановом пространстве класса C^∞, при которой размерность метрики $[g_{ij}dx^i dx^j] = 2$. Если при этом $[dx^i] = 0$, $[g_{ij}] = 2$, то размерность называется абсолютной, а если $[dx^i] = 1$, $[g_{ij}] = 0$, то — относительной. Размерностная производная от тензора $A^{i_1\dots i_p}_{i_1\dots i_q}$ веса w определяется формулой

$$\delta A^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = vA^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + \sum_{k=1}^{p} \omega^{i_k}_s A^{i_1\dots s\dots i_p}_{j_1\dots j_q} -$$

$$- \sum_{k=1}^{q} \omega^s_{j_k} A^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots s\dots j_q} + (w + \alpha/n)\,\omega A^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q},$$

где vA означает вариацию тензора A по некоторому параметру t, а $\omega_{ij} = {}^1/_2 v g_{ij}$, $\omega = g^{ij}\omega_{ij}$, $\alpha = [A]_{\text{отн}}$.

Автор получает оценки размерностей производной характеристических корней эллиптического дифференциального оператора и доказывает, что если $G(x, y)$ — тензор Грина соответствующего уравнения, то δG регулярно для всех точек области D и $\delta G = 0$, если x лежит на границе области. Получено также выражение δG через ковариантные производные от G. Устанавливается связь абстрактной относительной размерности с размерностями физических величин электромагнитного поля. Г. И. Кручкович

9081. Одна теорема двойственности. Серр (Un théorème de dualité. Serre Jean-Pierre), Comment. math. helv., 1955, 29, № 1, 9—26 (франц.)

Рассматривается комплексное аналитическое многообразие X комплексной размерности n, обладающее счетным базисом и аналитически расслоеннсе пространство V с базой X, r-мерным комплексным векторным пространством C^r в качестве слоя и комплексной линейной группой в качестве структурной группы. Аналитическая расслоенность означает, что связь между системами координат в окрестностях с номерами α и β устанавливается голоморфной обратимой матрицей $M_{\alpha\beta}$. Через V^* обозначается пространство с той же базой, слоем и группой, но с матрицами $(M^*_{\alpha\beta})^{-1}$ вместо $M_{\alpha\beta}$. $H^q(X, \Omega^p(V))$ обозначает векторное пространство q-мерных гомологий X с произвольными носителями и с коэффициентами в пучке $\Omega^p(V)$ ядер дифференциальных голоморфных форм степени p на V. Такое же пространство, но с компактными носителями обозначается через $H^q_*(X, \Omega^p(V))$.

Доказывается следующая теорема двойственности: Если размерности пространств $H^q(X, \Omega^p(V))$ и $H^{q+1}(X, \Omega^p(V))$ конечны, то между векторами пространств $H^q(X, \Omega^p(V))$ и $H^{n-q}_*(X, \Omega^{n-p}(V))$ определено невырожденное скалярное произведение. В частности, размерности этих пространств совпадают. Указывается условие, при котором такое скалярное произведение существует, даже если размерности, о которых идет речь, бесконечны.

Отсюда легко следует, что если X — многообразие Штейна, $H^q_*(X, \Omega^p(V))$ для $q \neq n$, а если X компактно, то $H^q(X, \Omega^p(V))$ и $H^{n-q}_*(X, \Omega^{n-p}(V^*))$ имеют одинаковую размерность.

Каждый дивизор D на X определяет пучок $L(D)$ (РЖМат, 1955, 5260). Предположим, что на X существует n-мерная мероморфная форма (например, это так, когда X — алгебраическое многообразие), и обозначим ее дивизор через K. Доказывается, что для любого дивизора D пространства $H^q(X, L(D))$ и $H^{n-q}_*(X, L(K - D))$ имеют одинаковую размерность. Автор показывает, как отсюда следует теорема Римана—Роха на кривых, которая в его терминах принимает вид $h^0(D) - h^1(D) = \deg D + 1 - g$, где $h^i(D) = \dim H^i(X, L(D))$ $(i = 0, 1)$, а $\deg D$ — степень дивизора D. И. Р. Шафаревич

9082. Однородные келеровы многообразия с полупростой группой движений. Борель (Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups. Borel Armand), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 12, 1147—1151 (англ.)

Изучаются однородные многообразия с полупростой группой движений, допускающие инвариантную относительно движений комплексную аналитическую келерову структуру. Если такое многообразие компактно, оно является алгебраическим и допускает клеточное разбиение, причем каждая клетка оказывается бирационально и бирегулярно эквивалентной комплексному аффинному пространству. Если многообразие не компактно, оно может быть комплексным аналитическим образом расслоено, причем слоем является комплексное аналитическое многообразие описываемого типа, а базой — симметрическая ограниченная область.

Автор находит признак того, чтобы однородное многообразие с группой движений G и стационарной подгруппой U обладало инвариантной келеровой структурой. Для этого оказывается необходимым, чтобы стационарная подгруппа U была компактной и являлась централизатором компактной коммутативной подгруппы группы G. В случае, если группа G компактна, это условие является также достаточным.

С помощью полученных результатов доказывается теорема: Ограниченная область в комплексном n-мерном пространстве, допускающая транзитивную полупростую группу аналитических гомеоморфизмов, является симметрической (т. е. является симметрическим однородным пространством в смысле Э. Картана). Эта теорема в качестве предположения была высказана ранее Э. Картаном и доказана им для случаев, когда размерность области не превосходит трех (Cartan É., Abhandl. Math. Sem. Hamburg., 1935, 11, 116—162). Ф. А. Березин

9083. Законность общего решения уравнений Эйнштейна $g^{\mu\nu}_{;\rho} = 0$ в случае $\varphi = 0$. Тонла (Validité de la solution générale des équations d'Einstein $g^{\mu\nu}_{;\rho} = 0$ dans le cas $\varphi = 0$. Tonnelat Marie-Antoinette), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 22, 1468—1470 (франц.)

В предыдущих работах автора (C. r. Acad. sci., 1950, 230, 182; J. phys. et le radium, 1951, 12, 81; 1952, 13, 177) было найдено общее решение уравнений единой теории поля Эйнштейна:

$$g^{\mu\nu}_{+-;\rho} \equiv \partial_\rho g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} g^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} g^{\mu\sigma} - g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} = 0$$

в случае, когда $\varphi = \det g_{\mu\nu} \neq 0$. В реферируемой работе исследуется особый случай, когда $\varphi = 0$, особенно важный для нахождения сферически-симметричного решения (чисто электрический или чисто магнитный случай). При $\varphi = 0$ коэффициенты аффинной связности могут быть вычислены непосредственно как функции поля, в частности, когда найдено общее решение уравнений $g^{\mu\nu}_{+-;\rho} = 0$. Приведены условия разрешимости уравнений $g^{\mu\nu}_{+-;\rho} = 0$ при $\varphi = 0$. А. Я. Темкин

9084. Элементарные основные принципы обобщенной теории относительности. B_2. Главатый (The elementary basic principles of the unified theory of relativity. B_2. Hlavatý Václav), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, 4, № 2, 247—277 (англ.)

Работа примыкает к предыдущей статье автора (РЖМат, 1955, 1466). Обозначения сохраняем. Основной

задачей попрежнему является вычисление связности $\Gamma^{\alpha}_{\lambda\omega}$ через $g_{\lambda\mu}$ из условий (*B*). Это делается (как и во второй части предыдущей статьи) в предположении $n=4$ и сигнатура $h_{\lambda\mu}$ (— — — +), причем используется специально подобранный (но теперь несколько иной) неголономный репер. Это упрощает выкладки. Автор рассматривает 3 случая: 1) $D\neq 0$, $k\neq 0$; 2) $D\neq 0$, $k=0$; 3) $D=k=0$, где $2K=\frac{1}{2}k_{\alpha\beta}k^{\alpha\beta}$, $k=\mathrm{Det}\,|k_{\alpha\beta}|\,/\,/\,\mathrm{Det}\,|h_{\alpha\beta}|$, $D=K^2-k\,(k\leqslant 0)$. В случае (1) за векторы неголономного репера принимаются векторы $_{x}e^{\lambda}$ ($x=1$, 2, 3, 4), для каждого из которых $k^{\nu}_{\lambda}\,e^{\lambda}=\lambda e^{\lambda}$. При этом λ — корни уравнения $\lambda^4+2\lambda^2K+k=0$, так что $\lambda_1=-\lambda_2=i\sqrt{\sqrt{D}+K}$, $\lambda_3=-\lambda_4=\sqrt{\sqrt{D}-K}$. Положим $\lambda_{ijk}=1+\lambda_i\lambda_j+\lambda_j\lambda_k+\lambda_k\lambda_i$ при условии, что хоть два из индексов i, j, k различны. Положим

$$L_{xyz}=\frac{K_{xyz}}{\lambda_{xyz}}\ (x\neq y),\quad L_{xxz}=0,$$

где K_{xyz} — неголономные компоненты тензора $K_{\omega\mu\nu}$ (РЖмат, 1955, 1466). Тогда оказывается, что неголономные компоненты $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ имеют вид

$$\Gamma^{i}_{jk}=-\,{}_{j}e^{\nu}\,{}_{k}e^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,{}^{i}e_{\nu}+\tfrac{1}{2}\,(L_{jk}{}^{i}+3L_{[pqr]}\,k^{*p}_{j}\,k^{*q}_{k}\,h^{ri}--k^{m}_{(j}\,L^{\ i}_{k)\cdot m}.$$

Формула остается верной и для произвольного голономного репера, причем первый член правой части заменяется на $\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}$. Этот результат справедлив и в случае 2). Случай 3) исследуется автором особо и решение получается в несколько ином виде. П. К. Рашевский

9085 К. Введение в тензорное исчисление. Изд. I, Перевод с русс. Рашевский (Wstęp do rachunku tensorowego. Raševskij Petr Konstąntinovič. Tłum. z ros. Warszawa, Panstw. Wydawn, Nauk., 1955, **82**, 2 nlb., s., il., 8.80 zł), Przew. bibliogr., 1956, **12**, № 6, 72 (польск.)

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

9086. О соприкосновении регулярных дуг. II. Пимия (Über die Berührung regelmässiger Bogen. II. Pimiä Lauri), Turun yliopiston julkaisuja, 1955, **A16**, № 3, 9 S. (нем.)

Статья является продолжением статьи того же заглавия (РЖМат, 1956, 3315). Пользуемся уже известными терминами: 1) Exp $f(x)$ (экспонент), 2) Par $f(x)$ (параметр), 3) данная функция «аппроксимируется» другой, 4) данная функция «вполне аппроксимируется» другой, 5) ранг аппроксимации. Рассматриваются две кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$, находящиеся в первой координатной четверти и касательные к ox в (0,0). Пусть $f_m(x)=\Sigma_0^{m-1}p_i\,x^{r_i}$ и $g_n(x)=\Sigma_0^{n-1}q_i\,x^{s_i}$ — аппроксимирующие функции соответственно для $f(x)$ и $g(x)$.

1-й случай. $f_m(x)\not\equiv g_n(x)$, тогда $r_i=s_i$ и $p_i=q_i$ ($i=1,2,\ldots(\nu-1)$) и или 1) $r_\nu\neq s_\nu$ (считаем тогда $r_\nu<s_\nu$), или 2) $r_\nu=s_\nu$ и $p_\nu\neq q_\nu$ (считаем тогда $p_\nu>q_\nu$). В первом случае имеем $A\,[f(x)-g(x)]\equiv p_\nu\,x^{r_\nu}$. Во втором случае имеем $A\,[f(x)-g(x)]\equiv(p_\nu-q_\nu)\,x^{r_\nu}$ (A — оператор аппроксимации).

Доказывается: а) Если $f(x)$ и $g(x)$ аппроксимируются и хотя бы одна из этих функций вполне аппроксимируется, то $[f(x)-g(x)]$ также аппроксимируется. б) Если $f(x)$ и $g(x)$ вполне аппроксимируются соответственно через $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то $[f(x)-g(x)]$ вполне аппроксимируется через $[\varphi(x)-\psi(x)]$.

2-й случай. $f_m(x)\equiv g_n(x)$ ($n=m$) ($p_i=q_i$) ($r_i=s_i$) ($i=1,2,3\ldots$). Возможны следующие случаи: а) m конечное, тогда $[f(x)-g(x)]$ есть бесконечно малая ($x\to 0$) бесконечного порядка; $f_m(x)$ есть вполне аппроксимирующая функция для $f(x)$ и $g(x)$; б) $m=\infty$, но $\lim_{m\to\infty}r_m=R<\infty$, тогда ряд $\Sigma_1^{\infty}p_i$ сходится и $\Sigma_0^{\infty}p_i\,x^{r_i}$ вполне аппроксимирует $f(x)$ и $g(x)$, а $[f(x)-g(x)]$ есть бесконечно малая бесконечного порядка; в) $m=\infty$, $\lim_{m\to\infty}r_m=\infty$ и $[f(x)-g(x)]$ бесконечно малая бесконечного порядка. Далее Exp $[f(x)-g(x)]$ есть порядок соприкосновения кривых $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в точке (0, 0). А. С. Ковалько

9087. Дезарговы плоскости со смежными элементами. Клингенберг (Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Klingenberg Wilhelm), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **20**, № 1-2, 97—111 (нем.)

Отличается от статьи того же автора (РЖМат, 1955, 5297) допущением, что в аффинной плоскости со смежными элементами аффинно выполняются малая и большая теоремы Дезарга. Вследствие этого вместо кольца Хильмслева R возникает не обязательно коммутативное кольцо H (косое кольцо Хильмслева) с единицей 1, в котором уравнение $ax=1$ разрешимо, если a не нуль и не делитель нуля, все делители нуля двусторонни и их множество образует двусторонний идеал в H. Дезарговы проективные плоскости со смежными элементами определяются как плоскости над косым кольцом Хильмслева. См. также РЖМат, 1955, 6095; 1956, 5101 К. А. С. Смогоржевский

9088. О геометрической интерпретации модулярной группы. Сас (A moduláris csoport geometriai interpretációjáról. Szász Pál), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1955, **5**, № 1, 1—12 (венг.)

Известно(теорема Дедекинда), что составленные из дуг окружности криволинейные треугольники верхней полуплоскости комплексных чисел, происходящие из «треугольника» с вершинами $-(1+i\sqrt{3})/2$, $(1+i\sqrt{3})/2$, ∞ с помощью преобразований так называемой модулярной группы

$$\omega'=(\alpha\omega+\beta)\,/\,(\gamma\omega+\delta),\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

(коэффициенты — целые рациональные числа), заполняют без выреза верхнюю полуплоскость. Сеть, состоящая из полученных таким образом трегольников, называется модулярной конфигурацией. В литературе известен целый ряд доказательств этого свойства модулярной группы. В рецензируемой работе автор с элементарно-геометрическими средствами доказывает теорему Дедекинда, давая отличное от известных до сих пор построение модулярной конфигурации. В конце работы приводится доказательство, что модулярная конфигурация без выреза заполняет верхнюю полуплоскость. Gy Soós

9089. Изоморфизм точечно-решетчатых моделей, элементарногеометрической и в поле Галуа. Ернефельт, Квист (Die Isomorphie eines elementargeometrischen und eines Galois-Gitterpunktemodells. Järnefelt G., Qvist Bertil), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. **A1**, № 201, 11S. (нем.)

Работа связана с задачей построения конечной системы, соответствующей шредингеровой нерелятивистской модели линейного гармонического осциллятора.

Пары рациональных чисел (x, y) вида $\left(\frac{\mu m}{kn}, \frac{\nu m}{kn}\right)$, где

k, m, n — целые положительные, а μ и ν принимают значения $-k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k$, называются точками. Тройки рациональных чисел (a, b, c), где a и b одновременно $\not\equiv 0$, называются прямыми, если существуют по крайней мере две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такие, что $ax_1 + by_1 + c_1 = 0$ и $ax_2 + by_2 + c_2 = 0$. Прямые (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) тождественны в том и только том случае, если существует такое рациональное $\sigma (\neq 0)$, что $a_2 = \sigma a_1$, $b_2 = \sigma b_1$, $c_2 = \sigma c_1$. Точка (x, y) лежит на прямой (a, b, c), если $ax + by + c = 0$. Точка (x_B, y_B) лежит между точками (x_A, y_A) и (x_C, y_C) если выполнено одно из трех соотношений:

$$\frac{x_A - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y_A - y_B}{y_C - y_B} < 0, \quad \text{либо } x_A = x_B = x_C,$$

$$\frac{y_A - y_B}{y_C - y_B} < 0,$$

либо $y_A = y_B = y_C$, $\dfrac{x_A - x_B}{x_C - x_B} < 0$.

Два отрезка, или две пары точек (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_1', y_2'), (x_2', y_2') конгруэнтны, если

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2;$$

если же выражение слева больше выражения справа, то первый отрезок больше второго.

Построенной таким образом точечной модели G ставится в соответствие модель G_p в поле Галуа простой характеристики p. Для этого множество рациональных чисел, знаменатели которых $\not\equiv 0 \pmod p$, гомоморфно отображается на конечное поле характеристики p: $r \to r_p$. При этом точки (x, y) и прямые (a, b, c) системы G однозначно отобразится на точки (x_p, y_p) и прямые (a_p, b_p, c_p), которые составят систему G_p. Характеристика p поля Галуа выбирается так, чтобы: 1) элемент -1_p был невычетом и 2) чтобы элементы $1_p, 2_p, \ldots, (2M)_p$, где $M = 8k^3m^2n^2$, все были вычетами. Удовлетворить этим требованиям можно бесконечным множеством способов. Достаточно взять $p \equiv\equiv -1 \pmod{8q_1 q_2 \ldots q_s}$, где $q_1, \ldots, q_s$ — простые числа, меньшие $2M$. Доказывается, что при таком выборе между точками и прямыми моделей G и G_p устанавливается взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняются отношения инцидентности, порядка, конгруэнтности и сравнительной величины отрезков.

А. Г. Школьник

9090. О почти полных и почти метрических пространствах. **Насу** (On almost complete and almost metric spaces. Nasu Yasuo), Tensor, 1955, 5, № 1, 58—67 (англ.)

Следуя Менгеру (Menger K., Math. Ann., 1930, **100**, 467—501), автор определяет почти метрическое пространство R как совокупность точек с определенным функцией $\rho(p, q)$ расстоянием между точками p, q из R, удовлетворяющим условиям: 1) $\rho(p, q) \geqslant 0$, причем $\rho(p, q) = 0$ только при $p = q$; 2) существует функция симметрии $\sigma(x)$ такая, что $\lim_{x \to +0} \sigma(x) = 0$, и для любых точек p, q

$$\rho(p, q) \leqslant \sigma(\rho(q, p));$$

3) существует функция треугольника $\Delta(x)$ такая, что $\lim_{x \to +0} \Delta(x) = 0$ и для любых трех точек p, q, r

$$\rho(p, q) \leqslant \rho(p, r) + \rho(r, q) + \min\{\rho(p, r), \rho(r, q)\} \times \Delta \max\{(\rho(p, r), r, q)\}.$$

В пространстве R длина дуги кривой определяется как предел ломаной, вписанной в эту кривую, если этот предел существует.

Последовательность $\{p_i\}$ называется сильной последовательностью Коши, если для любых чисел d, $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что при $j > i \geqslant N$ проходящая через p_i и p_j спрямляемая кривая C удовлетворяет условию $d(C) < d$, $l(C) < \varepsilon$, где $d(C)$ — диаметр кривой, $l(C)$ — ее длина. Автор вводит понятие почти полного пространства R как такого, в котором каждая сильная последовательность Коши сходится. Рассматриваются вопросы сходимости последовательностей спрямляемых кривых. Доказывается, что в локально компактном и почти полном пространстве R любые две точки, соединенные кривой конечной длины l и диаметра d, можно соединить кратчайшей дугой с диаметром не более d. В заключение исследуется спрямляемо-связное пространство R, у которого любые две точки можно соединить спрямляемой дугой.

Г. И. Кручкович

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

9091. О точке с минимальной суммой квадратов расстояний от поверхности симплекса. **Ханани** (On a point of minimum sum of distances-squares from the faces of a simplex. Hanani Haim), Riveon Lematematika, 1954, **7**, 10—12 (иврит.; рез. англ.)

Перевод из Math. Revs., 1954, **15**, № 5, 461

9092. Овалы с эквихордальными точками. **Хельфенстейн** (Ovals with equichordal points. Helfenstein Heinz G.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 1, 54—57 (англ.)

По определению точка O внутри замкнутой выпуклой плоской кривой называется эквихордальной, или, коротко, $\mathcal{E}$-точкой, если всякая прямая, проходящая через O, пересекает кривую в двух точках, расстояние между которыми постоянно. Кривая, имеющая n различных $\mathcal{E}$-точек, называется n-$\mathcal{E}$-кривой. Ранее доказано несуществование n-$\mathcal{E}$-кривых при $n \geqslant 3$ (J. London Math. Soc., 1952, **27**, 429).

В реферируемой заметке доказывается несуществование вещественных 2-$\mathcal{E}$-криных в предположении, что в окрестности каждой точки искомой кривой кривая представима уравнением $y = f(x)$ и $f(x)$ имеет производные до шестого порядка включительно, и в качестве следствия устанавливается несуществование 2-$\mathcal{E}$-поверхностей в трехмерном пространстве, удовлетворяющих аналогичным условиям гладкости.

П. И. Касьяников

9093. Овалы в конечной проективной плоскости. **Сегре** (Ovals in a finite projective plane. Segre B.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 3, 414—416 (англ.)

В конечной проективной плоскости $\mathfrak{P}$ над телом Галуа характеристики $p \neq 2$ и порядка $q = p^h$ (h — натуральное) справедливо, как известно, утверждение, что каждое регулярное коническое сечение содержит в точности $q + 1$ точек. Если овал в $\mathfrak{P}$ определить как множество $q + 1$ точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, то можно высказать, как это сделали Ернефельт и Кустаанхеймо (Järnefelt G., Kustaanheimo P., An observation on finite geometries, Den 11-te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949, 166—182), гипотезу, что для $p \neq 2$ каждый овал является коническим сечением. В реферируемой работе эта гипотеза доказана. Точно так же показано, что для $p = 2$ теорема неверна.

M. Fiedler

9094. Об овалах в конечной линейной плоскости. **Сегре** (Sulle ovali nei piani lineari finiti. Segre

B e n i a m i n o), Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **17**, № 5, 141—142 (итал.)

Пусть $\mathfrak{P}$ — линейная конечная плоскость, т. е. некоторое проективное пространство над полем Галуа G. Порядок q поля G есть любое число вида $q = p^h$, где простое p — характеристика поля. а $h \geqslant 1$. $\mathfrak{P}$ содержит $q^2 + q + 1$ точек и столько же прямых; на каждой прямой $(q + 1)$ точек, и столько же точек $(q > 3)$ содержит всякое невырожденное коническое сечение. Овалом называется всякая совокупность $q + 1$ точек, из которых каждые три не лежат на одной прямой. Каждое невырожденное коническое сечение в $\mathfrak{P}$ является овалом. При $p \neq 2$ имеет место обратное: всякий овал является коническим сечением. Отсылая за доказательством этой теоремы к своей работе (реф. 9093), автор указывает, что доказательство может быть выведено из следующего предположения: при $p \neq 2$ треугольник, определяемый тремя точками овала, гомологичен треугольнику, образованному тремя прямыми, касательными к овалу в этих точках. А. Г. Школьник

9095. О выпуклых конусах. С а н д г р е н (On convex cones. S a n d g r e n L e n n a r t), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 263 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 6098.

9096. Оценка объемов параллелепипедов, содержащих некоторое выпуклое тело и содержащихся в нем. Х а д в и г е р (Volumschätzung für die einen Eikörper überdeckenden und unterdeckenden Parallelotope. H a d w i g e r H.), Elem. Math., 1955, **10**, № 6, 122—124 (нем.)

Методом индукции доказывается теорема: Если A — выпуклое тело в k-мерном евклидовом пространстве, то существуют прямые параллелепипеды P, содержащие A, и Q, содержащийся в A, такие, что их объемы $V(P)$, $V(Q)$ и объем $V(A)$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{k!} V(P) \leqslant V(A) \leqslant k^k V(Q).$$

Случаи $k = 2$, $k = 3$ были рассмотрены ранее другими авторами (Pólya G., Szegö G., Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Ann. Math. Stud., 1951, № 27; РЖМат, 1956, 8335). Г. И. Дринфельд

9097. Об однозначной определенности выпуклых шапок. Г р о т е м е й е р (Zur eindeutigen Bestimmtheit konvexer Mützen. G r o t e m e y e r K. P.), Arch. Math., 1955, 6, № 6, 454—461 (нем.)

Автор рассматривает обобщенные шапки $\mathfrak{M}$, определенные условиями: 1) $\mathfrak{M}$ — односвязная трижды непрерывно дифференцируемая поверхность, 2) край $\mathfrak{M}$ — дважды непрерывно дифференцируемая кривая, 3) кривизна $\mathfrak{M}$ положительна (точнее, нули кривизны образуют нигде не плотное множество), 4) $\mathfrak{M}$ однозначно проектируется на некоторую плоскость.

Доказываются теоремы: 1) Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ — изометричные обобщенные шапки. Если сферические отображения границ $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ конгруэнтны, то конгруэнтны $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$; 2) пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ — изометричные обобщенные шапки и пусть сферическое отображение границы $\mathfrak{M}$ — плоская кривая. Если граница сферического образа $\mathfrak{M}^*$ также плоская кривая, то $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ конгруэнтны или симметричны. Для конгруэнтности или симметрии обеих поверхностей достаточно потребовать, чтобы длина сферического образа (не обязательно плоского) края $\mathfrak{M}^*$ была не больше длины сферического образа края $\mathfrak{M}$. Доказательство этих теорем основывается на интегральной формуле, установленной ранее автором (РЖМат, 1954, 2338), и вспомогательных предложениях, относящихся к свойствам поверхностных полос.

См. также: 8488, 8678, 8693, 8694 Э. Г. Позняк

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

9098. Некоторые современные вопросы вычислительной математики. С о б о л е в С. Л., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 77

9099. Об одном способе повышения асимптотической точности метода сеток. К о р о л ю к В. С., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 4, 379—387

Рассматривается способ повышения асимптотической точности метода сеток, предложенный автором ранее (РЖМат, 1956, 2467). Исследуется рекуррентная система разностных уравнений, в которой используются простейшие разностные операторы как для внутренних узлов сетки, так и для граничных узлов сетки (оператор Коллатца). При этом поправки во внутренних и граничных узлах сетки, вычисляемые через решение предыдущей системы разностных уравнений, усложняются постепенно в отличие от способа, предложенного референтом (РЖМат, 1955, 4701), когда заранее фиксируется требуемая точность граничного оператора и оператора поправок во внутренних узлах сетки. Для обоснования предложенного способа автор формулирует две теоремы и одну лемму.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т а. При доказательстве второй теоремы автором опущено важное исследование свойств величин λ_{k+1}, входящих в условия уравнений (22), что не позволяет воспользоваться результатами книги Н. М. Гюнтера (РЖМат, 1956, 446К) и оставляет открытым вопрос о возможности применения простейшего граничного оператора в рекуррентной системе разностных уравнений. На основании проведенных в работе исследований можно сделать заключение только о возможности постепенного усложнения поправок во внутренних узлах сетки. Е. А. Волков

9100. Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток. Л а н д а у Л. Д., М е й м а н Н. Н., Х а л а т н и к о в И. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 16

9101. О решении дифференциальных уравнений в частных производных методом сеток. Б а б у ш к а, М е й з л и к (O řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí. B a b u š k a I., M e j z l í k L.), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 3, 331—358 (чеш.)

Этой статьей авторы прежде всего хотят помочь практикам, применяющим метод сеток. Но статья может быть интересна и для математика тем, что она касается еще не решенных проблем метода. Статья не содержит новых результатов, и утверждения, имеющиеся в ней, приводятся без доказательств. Авторы в первую очередь рассматривают важнейшие работы из этой области и в конце приводят исчерпывающую библиографию (322 наименования журнальных статей и книг), относящуюся к методу сеток. O. Vejvoda

9102. О приближенном решении линейных граничных задач для эллиптических уравнений. Г а г у а М., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 6, 1061—1064

Внутри некоторой конечной односвязной комплексной области T, содержащей начало координат $z = 0$, рассматривается уравнение

$$\Delta u + a u_x + b u_y + c u = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — целые функции, действительные при действительных x и y. На гладкой в смысле Ляпунова границе Γ задается условие

$$Ku = \sum_{i,k}\left[a^{ik}u^{+}_{ik} + \int_{\Gamma}(b^{ik}(t,t_1)/|t-t_1|^{\beta})\,u^{+}_{ik}(t_1)\,dt_1\right] = f(t) \quad (2)$$
$$(t \in \Gamma,\ 0 \leqslant \beta < 1),$$

где u^{+}_{ik} — предельные внутренние значения производных порядка $i+k \leqslant m$ на контуре Γ. Функции a^{ik}, b^{ik}, f удовлетворяют на Γ условию Гёльдера.

Автор предполагает, что выполнены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, полученные И. Н. Векуа (Новые методы решения эллиптических уравнений, М. — Л., 1948), и занимается построением и оценкой сходимости приближенного решения. Строится система частных решений уравнения (1):

$$u_0 = G(0,0,z\bar{z});\ u_{2k-1} = \mathrm{Re}\,A;\ u_{2k} = \mathrm{Im}\,A,$$

где $A = G(z,0,z,\bar{z})\,z^k - \int_0^z t^k \partial G(t,0,z,\bar{z})/\partial t\,\partial t$, G — функция Римана уравнения (1). Приближенное решение ищется в виде $u_n = \sum_{i=0}^{2n} a_i u_i$, причем коэффициенты a_i определяются из системы $\sum_{i=0}^{2n} a_i K u_i = f_n$, где f_n — наилучшее приближение f в классе функций вида $y = \sum_{i=0}^{2n} c_i K u_i$. Для решения последней системы автор пользуется методами Галеркина и коллокации. На основании работы автора (РЖМат, 1956, 8344) и предварительного замечания доказывается, что если u является решением задачи (1) — (2) и имеет все u^{+}_{ik} до порядка p ($p \geqslant m$) включительно, непрерывные на Γ в смысле Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha < 1$), то для приближенных решений u_n справедлива оценка $\|u - u_n\| = O\{(n-m)^{-p+m-\alpha}\}$ ($n = m+1,\ldots$). При этом $\|u\| = \sup_{i+k \leqslant m}\{\max_{x+iy \in T}|u_{ik}|\}$. Автор отмечает, что в случае метода Галеркина правая часть соответствующей системы может быть заменена на $\int_{\Gamma} f\psi_j\,|\,dt\,|$ ($j = 0,\ldots,2n$).

Указывается, что аналогичный прием может быть применен при решении систем уравнений вида (1), а также некоторого класса дифференциальных уравнений более высокого порядка. Библ. 9 назв. А. И. Кошелев

9103. **О приближенном решении одномерной задачи Стефана. Мирзаджанзаде А. Х., Джалилов К. Н.**, Ж. техн. физики, 1955, **25**, № 10, 1800—1803

Дается приближенное решение задачи Стефана для случая одномерного полупространства при постоянной начальной температуре и постоянной температуре на границе. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\partial^2 T_1/\partial x^2 = a_1^2\,\partial T_1/\partial t,\ 0 < x < l, \quad (1)$$

$$\partial^2 T_2/\partial x^2 = a_2^2 \partial T_2/\partial t,\ l < x < \infty \quad (2)$$

при условиях $T_1(0,t) = T_0 = \mathrm{const}$; $T_2(x,0) = 0$; $T_2(\infty,t) = 0$; $T_1(l,t) = T_2(l,t) = T_{\text{пл}} = \mathrm{const}$;

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(l,t)}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial T_1(l,t)}{\partial x} = k\gamma_2 \frac{dl}{dt}. \quad (3)$$

Введя «толщину пограничного слоя» L при условиях $T_2(L,t) = 0$, $\dfrac{\partial T_2(L,t)}{\partial x} = 0$, нулевые приближения для T_1 и T_2 находят из уравнений $\partial^2 T_1/\partial x^2 = 0$, $\partial^2 T_2/\partial x^2 = 0$. Подставляя нулевые приближения в правые части уравнений (1) и (2), находят первые приближения. С помощью правых приближений, условий (3) и $\partial T_2(l,t)/\partial x = 0$ составляется система обыкновенных уравнений 1-го порядка для определения $l(t)$ и $L(t)$. Сопоставляя этой системе одно эквивалентное ей уравнение с изолированной особой точкой $l = 0$, $L = 0$, устанавливают, что решение последнего уравнения имеет вид $L = \alpha_1 l$, где α_1 — корень некоторого квадратного уравнения. После этого легко определяются $l(t)$ и $L(t)$. Б. Н. Бабкин

9104. **Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Дородницын А. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 78

9105. **Решение задачи Гурса методом конечных разностей. Ярышева И. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 155

9106. **О приложении алгорифма Шварца к приближенному решению некоторых краевых задач. Яковлев И. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 154—155

9107. **Метод численного решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Арнеодо** (Un sistema per la risoluzione numerica di equazioni differenziali lineari e non lineari. Arneodo Carlo), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952—1953, **87**, № 1, 245—260 (итал.)

Для решения некоторых классов дифференциальных уравнений применяются электрические моделирующие устройства, составленные из элементов, реализующих операции умножения, интегрирования (по времени t) и т. д. Автор выделяет (среди основных) также «оператор задержки», решающий уравнение $x = y + k dy/dt$ относительно y. Предлагается метод численного решения дифференциальных уравнений высшего порядка, основанный на сведении уравнения к системе уравнений первого порядка и последовательном применении к этой системе разностного метода таким образом, что воспроизводится процесс решения уравнения на моделирующем устройстве указанного типа. В частности, для «оператора задержки» предлагается формула для разностного метода:

$$y_{n+1} = y_n \exp(-h/k) + x_{n+1}[1 - \exp(-h/k)],$$

где h — шаг (точная в предположении, что $x(t) = \mathrm{const}$ на полуинтервалах $t_n < t \leqslant t_{n+1}$). Рассмотрены примеры. М. Л. Бродский

9108. **Замечания о численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Рутисхаузер** (Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Rutishauser Heinz), Z. angew. Math. und Phys., 1955, **6**, № 6, 497—498 (нем.; рез. англ.)

На основании результатов, полученных для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, делается вывод, что формулы Кутта — Цурмюля имеют точность порядка h^4, а не h^{n+2}, как обычно предполагалось. Аналогично, в случае метода Адамса погрешность зависит только от числа введенных разностей, но не от порядка уравнения. С. Г. Кислицын

9109. **Применимость метода приближенного интегрирования С. А. Чаплыгина к некоторому классу обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Воробьев Л. М.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 181—185

Дается метод построения двусторонних приближений решения уравнения

$$y'' = F(x,y,y') \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0' \geqslant 0. \qquad (2)$$

Относительно функции $F(x, y, y')$ предполагается, что она непрерывна вместе с производными первого порядка, конечна и положительна при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant +\infty$, $y_0' \leqslant y' \leqslant +\infty$ и, кроме того, $\partial F/\partial y > 0$ для всех $y \geqslant y_0$ и $y' \geqslant y_0'$. Двусторонние приближения решения уравнения (1) при условиях (2) строятся с помощью уравнений

$$dz_n'/dx = F(x, Z_{n-1}, z_n'),$$
$$du_n'/dx = F(x, U_{n-1}, u_n'),$$
$$(n = 1, 2, \ldots),$$

где Z_0' и U_0' — верхняя и нижняя функции для уравнений $dz'/dx = F(x, \infty, z')$, $du'/dx = F(x, y_0, u')$ при начальном условии $z'(x_0) = u'(x_0) = y_0'$ ($Z_0' > 0$, $U_0' > 0$).

С помощью метода Чаплыгина строятся соответственно верхняя (Z_n') и нижняя (U_n') границы для z_n' и u_n', а затем верхнее и нижнее приближения для решения уравнения (1):

$$Z_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} Z_n'(x)\,dx,\ U_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} U_n'(x)\,dx.$$

Теорема о дифференциальных неравенствах для уравнения (1) в работе не рассматривается. Б. Н. Бабкин

9110. Об одном обобщении теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 126

9111. Сообщение об экспериментах по приближенному решению дифференциального уравнения. Янг (Report on experiments in approximating the solution of a differential equation. Young Robert L.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 1, 26—28 (англ.)

Сообщаются результаты приближенного решения уравнения Матье

$$y'' = (s\cos^2 x - b)\,y = fy,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

где параметры b и s были выбраны равными $b = 30,55884898$ и $s = 25$, двумя методами: Рунге—Кутта и при помощи использования «предсказывающей» и «поправочной» формул (Blanch G., Math. Tables and Other Aids Comput., 1952, 6, 219—223). Сравнение полученных результатов показывает, что второй метод дает более точные результаты даже при вдвое большем шаге интегрирования. Однако для этого метода требуется большая программа и начало интегрирования необходимо делать другим методом. А. Е. Бажанова

9112. Формулы приближенного представления решения уравнения $(ax + b)y'' + c_1y' + c_0y = 0$ в виде полинома второй степени на отрезке $[-1, +1]$. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 16, 45—65

Ищется приближенное решение уравнения

$$(ax + b)y'' + c_1y' + c_0y = 0 \qquad (1)$$

при условиях $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$ на отрезке $[-1,1]$ (точка $x = -b/a$ не принадлежит $[-1,1]$) в виде $y \approx p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$. Результат подстановки $p(x)$ в уравнение (1) дает многочлен второй степени $Q_2(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2$, откуда p_0, p_1, p_2 выражаются через q_0, q_1, q_2 линейно. Из начальных условий получаем две линейные зависимости относительно q_0, q_1, q_2. Требуется, чтобы многочлен $Q_2(x)$ был наименее уклоняющимся от нуля среди всех многочленов второй степени, коэффициенты которых связаны указанными двумя линейными зависимостями. Из этого условия $Q_2(x)$ находится методом, изложенным в работе автора (Тр. Среднеаз. ун-та, 1939, сер. 5, матем., вып. 18). Рассматриваются два примера.

А. Н. Иванова

9113. Об одном методе приближенного отыскания собственных значений. Пугачев Б. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 153—154

9114. Спектроскопия собственных значений. Ланцош (Spectroscopic eigenvalue analysis. Lanczos C.), J. Wash. Acad. Sci., 1955, 45, № 10, 315—323 (англ.)

Описывается новая идея для решения полной проблемы собственных значений. Метод состоит в построении последовательности векторов $b_0, \ldots, b_N$ по рекуррентным соотношениям $b_k = Cb_{k-1} - b_{k-2}$, где $C = 2E - 4A$, A — данная матрица, все собственные значения которой заключены в интервале (0,1). Тогда каждая компонента вектора b_k имеет вид $b_k^{(i)} = c_1\cos k\theta_1 + \ldots + c_n\cos k\theta_n$, где числа θ_i связаны с собственными значениями матрицы A соотношениями $\lambda_i = \sin^2\frac{\theta_i}{2}$. Последовательность $b_k^{(i)}$ (i — фиксируется) подвергается преобразованию Фурье, что позволяет определить θ_i и, следовательно, λ_i. Для получения хорошей точности автор рекомендует брать очень много итераций (порядка 1000).

Метод требует огромного числа вычислительных операций, но легко осуществляется на быстродействующих вычислительных устройствах и позволяет получать все собственные числа с большой точностью. Автор сообщает об экспериментальной проверке метода на матрицах малого порядка (6—8) с использованием быстродействующих машин. В. Н. Фаддеева

9115. Об одном методе вычисления собственных значений данной матрицы. Дервидюэ (Une méthode mécanique de calcul des vecteurs propres d'une matrice quelconque. Derwidué L.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 5, 150—171 (франц.)

На примере матрицы 5-го порядка автор показывает, что посредством чередования элементарных преобразований над строчками и столбцами в характеристическом определителе можно аннулировать все элементы выше косой строки, расположенной рядом с главной диагональю. Тем же приемом можно привести определитель к трехдиагональному виду или к виду Фробениуса. Во всех трех случаях (метод Хессенберга, метод Ланцоша и Гивенса, метод Данилевского) характеристический полином легко определяется по рекуррентным формулам. В. Н. Фаддеева

9116. Сходимость алгебраического интерполирования по корням многочлена Чебышева для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением. Крылов В. И., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 3, 362—366

Доказывается, что если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1, +1]$, то последовательность лагранжевых многочленов ($L_n(x)$ $\left(L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} l_{n,k}\,f(x_k^{(n)})\right.$; $l_{n,k}(x) = T_n(x)/(x - x_k^{(n)})\,T_n'(x_k^{(n)})$; $x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ — корни многочленов Чебышева степени n), интерполирующих $f(x)$ по ее значениям в $x_k^{(n)}$ — сходится к $f(x)$ равномерно относительно x на $[-1, +1]$. Если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[-1, +1]$, то $L_n(x)$ сходится к $f(x)$ во всех точках непрерывности f. А. Н. Иванова

9117. Интерполяция по значениям (нетабулированным) функции внутри интерполяционного интервала. Марек (Interpolace na základě hodnot funkce uvnitř interpolačního intervalu. Marek Jindřich M.), Sbor. Českosl., akad. věd. Lab. mat. strojů, 1954, № 2, 117—145 (чеш.; рез. русс., англ.)

Коротко упоминается о новой чехословацкой вычислительной машине, работающей на перфокартах. В гл. 1 дан обзор интерполяционных формул (формулы Ньютона, Гаусса, Эверетта, Стирлинга и Бесселя), неудобных при вычислениях на счетно-аналитических машинах, поскольку они требуют для каждого интерполирования вычисления (или разыскивания по вспомогательным таблицам) соответствующих коэффициентов.

В гл. 2 описывается метод интерполяции по нетабулированным значениям функции внутри интервала интерполяции (между двумя табулированными аргументами). К каждому значению f_k (через f_k обозначено табулированное значение $f(x)$ для равноотстоящих значений аргументов x_k), вместо обычных разностей, табулируются интерполяционные коэффициенты a_k, b_k (и c_k). Так, интерполяционная формула 2-й степени имеет вид $f(x) = (a_k n + b_k) n + f_k + \varepsilon_i$, где $n = (x - x_k)/(x_{k+1} - x_k)$, $0 \leqslant n \leqslant 1$; $a_k = 2\bar{\Delta}_k^2$, $b_k = 2\bar{\Delta}_k - \bar{\Delta}_k^2$ ($\bar{\Delta}_k = f_{k+\frac{1}{2}} - f_k$; $\bar{\Delta}_k^2 = \bar{\Delta}_{k+\frac{1}{2}} - \bar{\Delta}_k$; $\bar{\Delta}_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+1} - f_{k+\frac{1}{2}}$), причем $f_{k+\frac{1}{2}}$ является нетабулированным значением $f(x)$ для аргумента $(x_k + x_{k+1})/2$. Интерполяционная ошибка ε_i в 8 раз меньше ($|\varepsilon_i| \leqslant 0{,}008\ldots h^3 |f'''(\zeta)|$), чем соответствующая ошибка в формуле Ньютона 2-й степени. Табличная ошибка (ошибка, возникающая вследствие того, что, вместо точных значений функции и их разностей, при вычислении берутся округленные табулированные значения) интерполяционной формулы 2-й степени равна табличной ошибке формулы Ньютона той же степени, т. е. $|\varepsilon_t| \leqslant 0{,}625\, e$, где e — единица последнего значащего разряда. Коэффициентная ошибка, обусловленная округлением интерполяционных коэффициентов, не имеет места, поскольку коэффициенты a_k и b_k получаются из произведения точных значений первой и второй разностей и нет необходимости их округлять.

Аналогично рассматривается интерполяционная формула 3-й степени $f(x) = ((a_k n + b_k) n + c_k) n + b_k + \varepsilon_i$. При этом формулы для коэффициентов a_k, b_k и c_k выведены для двух различных способов подразделения интервала интерполяции на три подинтервала (на три равные части ($|\varepsilon_i| < 0{,}000514\ldots h^4 |f^{(4)}|$) и неравномерное подразделение, при котором точки деления близки к нулям полинома Чебышева 3-й степени ($|\varepsilon_i| < 0{,}000459\, h^4 |f^{(4)}|$)). Табличная ошибка при обоих способах разбиения такова же, как и в формуле Ньютона 3-й степени, именно $|\varepsilon_t| \leqslant 0{,}8125\, e$. Коэффициентная ошибка является наименьшей ($|\varepsilon_k| \leqslant 0{,}316\, e$), если сначала округляются a_k и b_k и затем по этим округленным значениям вычисляется c_k (при вычислении точных значений всех коэффициентов с их последующим округлением имеет место $|\varepsilon_k| < e$).

В гл. 3 рассматривается случай двух независимых переменных. Так, для случая интерполяции по x 2-й степени, а по y 3-й степени интерполяционная формула для $F(x, y)$ имеет вид

$$F_{r+n,\,s} = (b_{2;\,0}\, n + b_{1;\,0})\, n + F_{r;\,s};$$
$$a_{n;\,1} = (b_{2;\,1}\, n + b_{1;\,1})\, n + a_{0;\,1};$$
$$a_{n;\,2} = (b_{2;\,2}\, n + b_{1;\,2})\, n + a_{0;\,2};$$
$$a_{n;\,3} = (b_{2;\,3}\, n + b_{1;\,3})\, n + a_{0;\,3};$$
$$F_{r+n:\,s+p} = ((a_{n;\,3}\, p + a_{n;\,2})\, p + a_{n;\,1})\, p + F_{r+n;\,s}.$$

При этом $|\varepsilon_i| \leqslant 0{,}008\ldots h^3 |F_x| + 0{,}00045\ldots h^4 |F_y|$. Коэффициенты $a_{i;\,j}$ и $b_{i;\,j}$ вычисляются при помощи следующих нетабулируемых значений функции $F(x, y)$ внутри области интерполяции (табулируемые значения подчеркнуты):

$$x \downarrow \quad \overset{y}{\rightarrow}$$
$$\underline{F_{r;\,s}};\ F_{r;\,s+0{,}3};\ F_{r;\,s+0{,}7};\ \underline{F_{r;\,s+1}};$$
$$F_{r+0{,}5;\,s};\ F_{r+0{,}5;\,s+0{,}3};\ F_{r+0{,}5;\,s+0{,}7};\ F_{r+0{,}5;\,s+1};$$
$$\underline{F_{r+1;\,s}};\ F_{r+1;\,s+0{,}3};\ F_{r+1;\,s+0{,}7};\ \underline{F_{r+1;\,s+1}}.$$

В качестве примера таблицы таких интерполяционных коэффициентов приводится часть пятизначных таблиц $\operatorname{sh}(x+iq) = u + iv$ ($q = 2y/\pi$) для $x = 1$; 1,1 и $q = 0{,}0$; 0,1; 0,2;...; 1,9. Как в направлении аргумента x, так и в направлении аргумента y (соответственно q) производится интерполяция 2-й степени. A. Svoboda

9118. Теоремы о погрешностях приближения функции первыми членами ее степенного ряда. Жичковский (O błędach przybliżenia funkcji pierwszymi wyrazami jej szeregu potęgowego. Życzkowski M.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, Ser. 1, 1, № 2, 371—392 (польск.; рез. русс., англ.)

Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ для $0 \leqslant x \leqslant x_m$; $S_p(x) = \sum_{n=0}^{p-1} a_n x^n$, $R_p(x) = f(x) - S_p(x)$, $P_p(x) = R_p(x)/f(x)$. Исследуются достаточные условия, при которых функции $|R_p(x)|$ и $|P_p(x)|$ являются неубывающими в $0 \leqslant x \leqslant x_m$. Эти условия имеют практическое значение. Например, если функции $|R_p(x)|$ и $|P_p(x)|$ являются неубывающими в $0 \leqslant x \leqslant x_m$, то тогда $|R_p(x)| \leqslant |R_p(x_m)|$ и $|P_p(x)| \leqslant |P_p(x_m)|$ в этом интервале. Эти неравенства оценивают ошибку аппроксимации функции $f(x)$ полиномом $S_p(x)$ в $0 \leqslant x \leqslant x_m$ и эта оценка является более точной, чем оценка полученная при помощи остаточного члена в форме Лагранжа (при разложении в ряд Маклорена).

В § 1 формулируется проблема. В § 2 дается теорема об абсолютной погрешности. Приведены в таблице 7 пар условий, соответственно различным предположениям относительно a_n и x_m. Например, первая из этих пар условий: если $a_n \geqslant 0$ для $n = p, p+1, \ldots$ или $a_n \leqslant 0$ для $n = p, p+1, \ldots$ и $0 < x_m \leqslant r$, где r — радиус сходимости данного ряда, то $|R_p(x)|$ является неубывающей функцией на интервале $0 \leqslant x \leqslant x_m$. Автор иллюстрирует теорему примером, затем дает ее доказательство, показывая при помощи элементарных вычислений, что каждая пара условий влечет $\frac{d}{dx} |R_p(x)| \geqslant 0$ в данном интервале. § 3 содержит теорему об относительной погрешности. Приводится таблица 6 пар новых условий, соответственно различным предположениям относительно a_n и x_n. Например, пятая пара условий: если $|a_i| \geqslant C/i!$, $|a_k| = C/k!$, $|a_n| \leqslant C/n!$ для $n \neq i$, где i — индекс первого, отличного от нуля, члена данной последовательности,

k — индекс первого из оставшихся членов, который отличен от нуля, и $x_m = 1/6$, то $|P_p(x)|$ является неубывающей функцией в $0 \leqslant x \leqslant x_m$. Автор иллюстрирует теорему примером и затем приводит ее доказательство тем же методом, что и в предыдущем параграфе. Автор отмечает, что работа не претендует на исчерпывающее решение проблемы, но ее результаты могут быть применены на практике. Имеется больше десятка опечаток. M. Warmus

9119. **Некоторые полезные таблицы для аппроксимации гладких кривых полиномами пятой и ниже степеней. Ракфорд, Шулц** (Some useful tables for approximating smooth curves by fifthand-lower degree polynomials. Rachford H. H., Jr, Schultz W. P.), J. Petrol. Technol., 1955, **7**, № 12, 43—44 (англ.)

Предлагаются некоторые таблицы для определения коэффициентов полиномов 5-й и ниже степеней, аппроксимирующих гладкие кривые. Н. А. Гречина

9120. **Рациональная аппроксимация показательной функции. Шёбе** (Rationale Approximationen der Potenzfunktion. Schöbe Waldemar), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1956, **2**, № 4, 469—484 (нем.

Дается доказательство представления функций x^y ($x > 0$, y — рациональное), $\log x$ и e^z ($z = (x-1)y$) в виде пределов последовательностей рациональных функций $x^y = \lim\limits_{k\to\infty} H_k(x, y)/H_k(x, -y)$; $\log x = \lim\limits_{k\to\infty} L_k(x, 0)//H_k(x, 0)$ и $e^z = \lim\limits_{k\to\infty} \overline{H}_k(1, z)/H_k(1, -z)$ соответственно, где

$$H_k(x, y) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k+y}{m}\binom{k-y}{k-m} x^m,$$

$$L_k(x, y) = [H_k(x, y) - H_k(x, -y)]/y,$$

$$\overline{H}_k(1 + z/y, z) = H_k(1 + z/y, y).$$

Выводятся оценки погрешностей, получающихся при замене рассматриваемых функций k-ми членами соответствующих последовательностей. Числовые примеры показывают, что полученные формулы дают хороший результат даже при небольших значениях k. Приводятся разложения рассматриваемых функций в непрерывные дроби. А. Е. Еажанова

9121. **Разностные приближения частных производных для неравномерных промежутков сетки. Роу** (Difference approximations to partial derivatives for uneven spacings in the network. Rowe Paul P.), Trans. Amer. Geophys. Union, 1955, **36**, № 6, 995—1008 (англ.)

Автор получает тремя способами (разложение в ряд Тейлора, операторный метод, математические шаблоны) различные разностные выражения для замены частных производных $\partial^2 h/\partial x^2$, $\partial^2 h/\partial y^2$, $\partial^4 h/\partial x^2 \partial y^2$ в случае неравномерной сетки. Полученные результаты автор использует для аппроксимации уравнения Лапласа и уравнения $\partial^2 h/\partial x^2 + j\partial^2 h/\partial y^2 = 0$, где j близко к единице. Исследуется порядок ошибки при замене дифференциальных выражений разностными. Отмечается, что наилучшая аппроксимация в каждом данном случае зависит от геометрии сетки. Д. Ф. Давиденко

9122. **Формулы численного дифференцирования и интегрирования для регулярной функции. Микеладзе Ш. Е.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 151—152

9123. **Об одной формуле механической квадратуры. Караниколов** (Върху една формула за механическа квадратура. Караниколов Хр.), Годишник Минно-геол. ин-т, 1953—1954 (1955), **1**, ч. 2, 159—170 (болг.; рез. русс., франц.)

Приводится формула механической квадратуры

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k [f(-kd) + f(kd)] + A_0 f(0),$$

которая точна для всех полиномов, степень которых не превышает $2n+2$. Коэффициенты A_k вычисляются по формулам

$$\int_0^{1/d} \prod_{\nu=1}^{n} (x^2 - \nu^2)\,dx = \frac{1}{2d}(-1)^n (n!)^2 A_0,$$

$$\int_0^{1/d} \frac{1}{x^2 - k^2} \prod_{\nu=0}^{n} (x^2 - \nu^2)\,dx = \frac{\psi_k(k^2)}{d} A_k,$$

где $\psi_k(x^2) = \dfrac{1}{x^2 - k^2} \prod\limits_{\nu=0}^{n} (x^2 - \nu^2)$. Число d является корнем уравнения $\int_0^{1/d} \prod_{\nu=0}^{n} (x^2 - \nu^2)\,dx = 0$, которое имеет единственный корень d, удовлетворяющий условию $n < 1/d < n+1$. Доказывается, что коэффициенты A_{n-1} и A_n всегда положительны. А. Н. Иванова

9124. **Видоизменение формулы Симпсона. Блаттер** (Eine Modifizierung der Simpsonschen Regel. Blatter Christian), Elem. Math., 1956, **11**, № 3, 56—59 (нем.)

Выведена квадратурная формула

$$F = F_t + \frac{h}{24}(-3y_0 + 4y_1 - y_2 - \cdots - y_{n-2} + 4y_{n-1} - 3y_n) + R$$

(F_t — площадь, вычисленная по формуле трапеций), отличающаяся от формулы Симпсона тем, что применима в случае не только четного, но и нечетного числа n интервалов. Значение остаточного члена R при этом составляет до 19/4 такового для формулы Симпсона.

Отмечается, что предложенная формула, будучи переписана в виде

$$F = F_t - \frac{1}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_1) - \frac{1}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0),$$

совпадает с известной формулой Грегори, если ограничиться в последней первыми двумя поправочными членами. А. Б. Шты н

9125. **От формулы Архимеда к кубатурной формуле. Ионеску** (De la formula lui Arhimede la o formulă de cubatură. Ionescu D. V.), Caz. mat. şi. fiz., 1956, **A7**, № 1, 3—10 (рум.)

Пусть a и b — абсциссы двух точек параболы. Формула Архимеда выражает площадь S сегмента параболы между точками A и B с абсциссами a и b через площадь S_1 параллелограмма, образованного хордой, параллельной ей касательной и прямыми $x = a$ и $x = b$: $S = {}^2/_3\, S_1$. Она является следствием квадратурной формулы Симпсона.

В реферируемой работе формула Архимеда обобщается на пространство. Рассматривается некоторое тело K. Пусть $S(z)$ есть площадь сечения K плоскостью, параллельной XOY. Если $S(z)$ — многочлен степени не выше третьей, то из формулы Симпсона объем V, заключенный между поверхностями, ограничивающими два тела K и K', которые имеют общие сечения плоскостями $z = a$ и $z = b$, будет

$$V = \frac{2}{3}(b-a)\left[S\left(\frac{b+a}{2}\right) - S'\left(\frac{b+a}{2}\right)\right].$$

В частности, если $z = a$ и $z = b$ касаются тела K, то

$V=\frac{2}{3}(b-a)S\left(\frac{b+a}{2}\right)$. Эта формула и является непосредственным обобщением формулы Архимеда. Если $S(z)$ — многочлен степени не выше второй, то формула для объема части тела, заключенного между плоскостями $z=a$ и $z=b$, может быть получена из квадратурной формулы трапеций. Если $S(z)=Pz^2+Qz+R$, то

$$V_a^b={}^1/_2(C(a)+C(b))-V_S P/\pi, \qquad (1)$$

где V_S — объем сферы, касающейся плоскостей $z=a$ и $z=b$, а $C(a)$ и $C(b)$ — объемы цилиндров, высоты $(b-a)$ и основания которых суть сечения K плоскостями $z=a$ и $z=b$. Применяется формула (1) в случаях, когда тело K ограничено поверхностью 2-го порядка.

Выводятся формулы для эллипсоида $V_a^b={}^1/_2(C(a)+C(b))+V_E$ и аналогичные формулы для конуса, гиперболоида и параболоида. Кроме того, для указанных объемов дана кубатурная формула $V_a^b=C\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{P}{2\pi}V_S$.

А. Н. Иванова

9126. Построение формул приближенного вычисления тройных интегралов по области, представляющей эллиптический конус. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 16, 66—75

В работе автора (Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1950, вып. 5) дается общий метод получения кубатурных формул. В реферируемой работе указанный метод применяется для получения различных формул приближенного интегрирования вида

$$\iiint_{(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\sum_{k=1}^{\mu}A_k f(x_k,y_k,z_k)+R_\mu,$$

где (D) есть область, ограниченная эллиптическим конусом $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$ и плоскостью $z=h$. Узлы кубатурной формулы (x_k, y_k, z_k) составляют основную систему точек уклонения. Выводятся формулы, точные для многочленов до 1-й, 2-й, 3-й, 4-й степеней.

А. Н. Иванова

9127. Формулы приближенного представления одного интеграла. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 16, 76—78

Выводятся формулы приближенного представления интеграла

$$I=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^a\int_0^b \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)\right]dx\,dy,$$

имеющего применения в теории корреляции. При этом применяются кубатурные формулы для интегрирования по квадрату, полученные автором (Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1951, вып. 8). Приводится верхний предел погрешности выведенных формул

$$|R_\mu|\leqslant L_{n-1}(f)\left\{\iint_D dx\,dy+\sum_{k=1}^{\mu}|A_k|\right\},$$

где A_k — коэффициенты кубатурной формулы, $L_{n-1}(f)$ — наименьшее уклонение полиномов степени $n-1$ от функции $f(x,y)$, μ — число точек уклонения. Приводятся результаты вычислений I для $r=1/2$, $a=1$, $b=1$ по двум различным формулам.

А. Н. Иванова

9128. Приближенное вычисление одного класса интегралов. Моран (The numerical evaluation of a class of integrals. Moran P. A. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 2, 230—233 (англ.)

Интеграл $\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$, где $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — функция нормального многомерного распределения зависимых случайных величин $x_1, x_2\ldots,x_n$ в случае, когда все корреляции между ними равны и положительны, автор сводит к одномерному интегралу, который интегрируется численно. Приводится оценка погрешности численного интегрирования одномерного интеграла. Результаты автора представляют собой развитие работ Гудвина (Goodwin E. T., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, 45, 241).

Н. А. Гречина

9129. Об одном методе решения систем линейных алгебраических уравнений. Мадич (Sur une méthode de résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires. Madić Petar), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 4, 439—441 (франц.)

Предлагается метод для решения плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}a_{ij}x_{j,\,n+1}^{(n)}=b_{i,\,n+1}\quad(i=1,2,\ldots,n). \qquad (1)$$

Вводится в рассмотрение вспомогательная система

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{jn}^{(n)}=b_{in}\quad(i=1,2,\ldots,n), \qquad (2)$$

где $x_{jn}^{(n)}$ — произвольно выбираемые числа, и две промежуточные системы

$$\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}x_{j,\,n+1}^{(n-1)}=b_{i,\,n+1}\quad(i=1,2,\ldots,n-1), \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}a_{i,\,j}x_{jn}^{(n-1)}=b_{in}\quad(i=1,2,\ldots,n-1). \qquad (4)$$

Из геометрических соображений решение системы (1) автор выражает через решение систем (2), (3), (4), полагая при этом $x_{nn}^{(n)}=1$, $x_{jn}^{(n)}=0$, $j\neq n$, а именно:

$$x_{n,\,n+1}^{(n)}=\varepsilon_{n+1}^{(n)}/\varepsilon_n^{(n)};\quad x_{j,\,n+1}^{(n)}=x_{j,\,n+1}^{(n-1)}-x_{n,\,n+1}^{(n)}x_{j,\,n}^{(n-1)},$$
$$j=1,2,\ldots,n-1,$$

где $\varepsilon_{n+1}^{(n)}=b_{n,\,n+1}-\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}x_{j,\,n+1}^{(n-1)}$; $\varepsilon_n^{(n)}=b_{n,\,n}-\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}x_{jn}^{(n-1)}$.

К системам (3) и (4) применим тот же процесс, так что решение (1) определяется рекуррентно. Метод не содержит делений, порождающих большие ошибки.

В. Н. Кублановская

9130. Численное решение некоторых систем векторных линейных уравнений. Дюло- (Résolution numérique de certains systèmes d'équations linéaires vectorielles. Duleau Jacques), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 7, 870—873 (франц.)

Рассматривается применение метода релаксации (stiefel, Z. angew. Math. und Phys., 1952, 3, 1—33) к решению линейных систем, встречающихся в задачах по сопротивлению материалов.

В. Н. Кублановская

9131. Исследования в прикладной математике. VIII. Об итеративных методах Лина и Фридмана для приводимых многочленов. Эйткен (Studies in practical mathematics. VIII. On the iterative methods of Lin and Friedman for factorizing polynomials. Aitken A. C.), Proc. Roy. Soc., Edinburgh, 1954—1955, A64, № 2, 190—199 (англ.)

Исследуется сходимость методов Лина и Фридмана для аппроксимации множителей многочлена итеративным делением. Получены матрицы преобразования ошибок в коэффициентах при переходе от одной итерации к другой, а также установлен критерий сходимости. Из сравнения этих методов с методом пред-

последнего остатка, допускающим ускоряющие схемы, рассмотренным автором в более ранней статье (Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1952, **A63**, 326—335), делается заключение, что эти методы являются менее простыми в теории и менее пригодными на практике. Даются числовые примеры. А. Е. Бажанова

9132. Основные арифметические операции с целыми рациональными функциями и их практическое применение. Кольман (Základní početní výkony s racionálními celistvými funkcemi a jejich praktické použití. Kohlmann Čeněk), Slaboproudý obzor, 1955, **16**, № 4, P19—P26 (чеш.)

Статья посвящена численным методам элементарных алгебраических операций над многочленами от одной переменной с действительными коэффициентами. Детально рассматриваются в основном уже знакомые схемы вычислений (пригодные также для использования счетных машин), которые иллюстрируются конкретными примерами. Приводятся схемы для вычисления произведения двух многочленов, для определения частного и остатка. Рассматриваются схемы Горнера, в частности схемы для разложения многочлена по данному квадратному двучлену и схемы для численного решения уравнений в случае действительных корней. В заключение разбираются метод для вычисления коэффициентов многочлена по данным корням и коэффициенту при наибольшей степени и метод разложения целой рациональной функции на сумму произведений некоторых линейных членов.

Эти методы приобретают полное значение лишь в том случае, когда систематически проводится большое количество алгебраических операций над многочленами, коэффициенты которых имеют большое число десятичных разрядов. V. Doleźal

9133. Об одной задаче расчета аэрации зданий (решение линейно-иррациональных уравнений). Буткевич А. В., Тр. Новосибир. инж.-строит. ин-та, 1954, **4**, 33—43

Иррациональное уравнение вида $\sum_{i=1}^{n} A_i \sqrt{P_i - x} + G = 0$; A_i, P_i, G — постоянные, к которому может быть приведено уравнение баланса воздухообмена, решается способом последовательных приближений по формуле $x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$; $n = 1, 2, \ldots$, где

$$\Delta x_n = \frac{\left[2\sum_{i=1}^{n}(\pm A_i \sqrt{|P_i - x_{n-1}|}) + G\right]}{\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\sqrt{|P_i - x_{n-1}|}}}.$$

В числителе корню из $|P_i - x_{n-1}|$ придается знак разности $P_i - x_{n-1}$. Указаны приемы наилучшего выбора x_0 в зависимости от величины G. Рассматриваются числовые примеры (точность — два, три десятичных знака). А. И. Взорова

9134. Простые формулы для вычисления некоторых важных трансцендентных функций. Люк (Simple formulas for the evaluation of some higher transcendental functions. Luke Yudell L.), J. Math. and. Phys., 1956, **34**, № 4, 298—307 (англ.)

Автор применяет видоизмененный метод трапеций (Hardy G. H., Divergent series, Oxford, 1949, 330) вычисления определенных интегралов (как для конечного, так и для бесконечного интервала интегрирования) для вычисления функций Бесселя первого рода целого порядка и модифицированной функции Бесселя второго рода, эллиптических интегралов I, II, и III рода, функции ошибок и функции Струве. Оценивается ошибка посредством изучения остаточного члена разложения Фурье. Имеются примеры. Библ. 17 назв. Н. А. Гречина

9135. Улучшение метода численного деления, использующего итерации Ньютона — Рафсона. Сторрер (Amélioration du procédé de division numérique utilisant l'itération de Newton — Raphson. Storrer F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 1, 30—33 (франц.)

В итерационной формуле $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ для вычисления обратной величины $y = x^{-1}$ автор предлагает коэффициент 2 заменять на каждом шаге различными близкими значениями для того, чтобы уменьшить интервал относительной погрешности вдвое по сравнению с соответствующим интервалом для коэффициента 2 (предполагается, что интервал относительной погрешности для начального приближения известен). Метод применим во всех итерационных формулах Ньютона — Рафсона, если только известен интервал относительной погрешности для начального приближения. Н. А. Ронзина

9136. Автоматические вычисления со степенными рядами. Хенрич (Automatic computations with power series. Henrici Peter), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 1, 10—15 (англ.)

Автор предлагает схемы вычисления на быстродействующих вычислительных машинах коэффициентов b_k степенного ряда, представляющего собой произвольную рациональную степень α данного степенного ряда

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (1)$$

а также коэффициентов ряда $x = y^{1/\alpha}(1 + b_1 y^{1/\alpha} + b_2 y^{2/\alpha} + \ldots)$, если известны коэффициенты ряда $y = x^{\alpha}(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$. При этом в первом случае используется рекуррентная формула

$$b_k = \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} [\alpha(k-p) - p]\, b_p a_{k-p},$$

а во втором — формула

$$b_n = \frac{1}{n+1} a_n^{(-(n+1)/\alpha)},$$

где $a_n^{(-(n+1)/\alpha)}$ есть коэффициент при n-м члене ряда, представляющего собой $-(n+1)/\alpha$-ю степень ряда (1).

Приводятся некоторые задачи, в которых могут быть применены рассмотренные схемы (в частности, из комбинаторного анализа, асимптотических разложений и дифференциальных уравнений). А. Е. Бажанова

9137. Некоторые замечания о вычислении числа π на машине НОРК. Николсон, Джинел (Some comments on a NORC computation of π. Nicholson S. C., Jeenel J.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 52, 162—164 (англ.)

Приведены результаты вычисления числа π на машине НОРК с 3089 десятичными знаками (последний знак округлен). Вычисление проводилось по формуле

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{100\,(0{,}2)^{2n+3} - (1/239)^{2n+1}}{2n+1}$$

с сохранением в промежуточных вычислениях 3093 десятичных знаков. При вычислении использовалось $n = 2214$ членов бесконечного ряда. Указывается, что составленная программа пригодна для вычисления π с любым числом десятичных знаков, при этом если для вычисления π с m десятичными знаками требуется t единиц времени, то для вычисления π с mk десятичными знаками потребуется $t \cdot k^2$ единиц времени. Для вычисления π с 3089 десятичными знаками потребовалось 13 мин. Указывается, что приведенные результаты

хорошо согласуются с результатами, полученными на машине ЭНИАК в 1949 г. (2035 десятичных знаков), и совпадают с повторными вычислениями, проведенными через 2 месяца на машине по той же программе. В. Н. Кублановская

9138. Заметка о суммировании рядов Чебышева. Кленшоу (A note of the summation of Chebyshev series. Clenshaw C. W.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 51, 118—120 (англ.)

Развивая свои предыдущие исследования (РЖМат, 1956, 772), автор предлагает способ суммирования «усеченных» рядов Чебышева, основанный на использовании рекуррентного соотношения для полиномов Чебышева, а также указывает погрешность округлений. Способ применим и для других функций (ряд Неймана для бесселевых функций), удовлетворяющих линейным рекуррентным соотношениям, и легко программируется на вычислительные машины. Н. А. Гречина

9139. Возникновение ошибки при вычислениях с цепными дробями. Хаусхолдер (Generation of error in computations with continued fractions. Householder Alston Scott), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 354 (англ.)

9140. О вычислении погрешностей измерений. Гоберидзе Д. В., Кириллов В. В., Сб. статей Ленингр. ин-та точной механ. и оптики, 1955, вып. 18, 64—70

Рассматриваются вопросы, связанные с математической обработкой результатов измерений. Авторы отрицают основное допущение формальной теории ошибок, заключающееся в том, что независимо от свойств измерительного прибора отклонение среднего арифметического результатов полученных измерений от истинного значения измеряемой величины может быть сделано сколь угодно малым при достаточно большом числе измерений, и утверждают, что для данного измерительного прибора существует некоторое предельное число измерений, далее которого рост числа измерений теряет смысл для увеличения точности измерения. Выводится формула для определения этого предельного числа. Н. А. Гречина

9141. Упрощенный метод гармонического анализа при помощи разложения по прямоугольно-периодическим функциям. Томода (乘び石函数による展開を使つて，Fourier分析に關する計算を簡單化する方法. 友田好文)，地震，Дзисин, J. Seismol. Soc. Japan, 1955, 7, № 4, 201—208 (япон.; рез. англ.)

Для определения коэффициентов Фурье a_m и b_m функции $f(x)$ применяются в качестве первого приближения выражения

$$\begin{pmatrix} a'_m \\ b'_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \begin{matrix} \varphi(mt) \\ \psi(mt) \end{matrix} dt$$

где $\varphi(mt)$ и $\psi(mt)$ — аналитические выражения для двух вспомогательных периодических прямоугольных ломаных линий, расположенных эквидистантно вдоль оси t и имеющих m волн в пределах $t = 2\pi$ и амплитуду, равную 1.

Приводятся схемы для вычисления значений a'_m и b_m и соответствующих значений a_m и b_m по заданным эквидистантным ординатам анализируемой кривой для $m = 12$ и $m = 24$. М. Г. Серебренников

9142. Местное предсказание погоды в баротропической атмосфере посредством численного решения одномерных рядов Фурье. Курихара (Regional numerical weather prediction in a barotropic atmosphere by the method of one-dimensional Fourier series with one-dimensional relaxation. Kurihara Y.), 氣象集誌, Кисё сюси, J. Meteorol. Soc. Japan, 1955, 33, № 4, 145—152 (англ.)

9143. Определение корня полинома на электронном дифференциальном анализаторе (Техника нахождения действительных и комплексных корней с использованием электронного дифференциального анализатора). Аткинсон (Polynomial root solving on the electronic differential analyser (A technique for finding the real and complex roots of a polynomial using an electronic differential analyser). Atkinson Cyril), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 52, 139—143 (англ.)

Рассматривается графическое решение уравнения $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ с вещественными коэффициентами на электронном дифференциальном анализаторе. При определении действительного корня уравнения функция $f(x$ восстанавливается дифференциальным анализатором как первообразная последовательно по производным $f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x), \ldots, f'(x)$. Действительный корень находится на пересечении графика $f(x)$ с осью Ox. При определении комплексного корня $x + iy$ фиксируется одна из переменных, например $y = y_1$, и соответствующее значение x находится как общий нуль (если он существует) функций $u(x, y_1)$ и $v(x, y_1)$ ($f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$), в противном случае изменяется y_1 и процесс повторяется.

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ определяются через производные $f(x)$ по формулам

$$u(x, y) = f - f'' \frac{y^2}{2!} + f^{IV} \frac{y^4}{4!} - \ldots,$$

$$v(x, y) = f'y - f''' \frac{y^2}{3!} + f^{V} \frac{y^5}{5!} - \ldots$$

В конце статьи приведены примеры уравнений 4-й, 5-й 6-й степеней, корни которых вычислялись на электронном дифференциальном анализаторе.

В. Н. Кублановская

9144. О номографируемости в целом и локальной номографируемости. Смирнов С. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 142—143

9145. О представлении некоторых зависимостей с четырьмя переменными номограммами с ориентированным транспарантом. Хованский Г. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 143—144

9146. Номограмма для вычисления коэффициентов множественной корреляции. Лорд (Nomograph for computing multiple correlation coefficients. Lord Frederic M.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, 50, № 272, 1073—1077 (англ.)

Приводится номограмма для определения коэффициента множественной (тройственной) корреляции по коэффициентам попарной зависимости согласно соотношению

$$R_{123} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}}}.$$

Номограмма имеет два бинарных поля и одну прямолинейную шкалу. Ответ читается в пересечении помеченных параллельных прямых с соответствующей криволинейной линией семейства по параметру (r_{23}). По этой номограмме величина R_{123} не может быть определена с большой точностью, так как транспарант и кривые для переменной r_{23} во многих случаях почти параллельны (в точках их пересечения), а для значений $R_{123} < 0{,}20$ вообще определение невозможно. С точки зрения теории и практики номографирования новых приемов построения не приводится. Н. Д. Ермилов

9147 К. О ядре интегрального уравнения для распределения подъемной силы и скоса колеблющегося крыла конечного размаха в дозвуковом потоке. Уоткинс, Раньян, Вулстон (On the kernel function of the integral equation relating the lift and downwash distributions of oscillating finite wings in subsonic flow. Watkins Charles E., Runyan Harry L., Woolston Donald S. NACA Tech. Note, 1954, № 3131, 44 p.) (англ.)

Ядро интегрального уравнения Кюснера (Küssner, Luftfahrtforshung, 1940, **17**, 370—378) для указанной в названии проблемы представляется в форме, удобной для приближенного вычисления методом исключения особенностей. Задача для звукового потока рассматривается как особый случай. J. W. Miles

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 474

9148 К. Прикладная математика. Ч. І. Кито (應用數學. (上). 鬼頭史城. 日本機械學會, 4 月, 364 頁, 950 圓. Нихон кикай гаккай, 1955, 364 стр., 950 иен) (япон.)

9149 К. Справочник по прикладной математике. Иосида (應用數學便覽. 吉田耕作等 . 丸善 . 518 頁, 950 圓. Марудзен, 1954, 518 стр., 950 иен) (япон.)

9150 К. Практическое применение рядов Фурье. Абэ (實用. フーリエ級數. 安部清孝. 森北出版, 259 頁, 320 圓. Морикита-сюппан, 1954, 259 стр., 320 иен) (япон.)

ТАБЛИЦЫ

9151 К. Таблицы полиномов Якоби. Кармазина Л. Н., М., Изд-во АН СССР, 1954, 250 стр., 27 р. 90 к.

В хорошо оформленном издании данных таблиц включены значения полиномов Якоби, коэффициенты и корни их до пятой степени включительно. Использовалось следующее выражение для этих полиномов (ортогональных с весом $x^{q-1}(1-x)^{p-q}$):

$$G_n(p, q, x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \frac{(q+n-1)^{(j)}}{(p+2n-1)^{(j)}} x^{n-j},$$

где $z^{(j)} = z(z-1)\ldots(z-j+1)$. Полиномы протабулированы для $x = 0\,(0{,}01)1$, $p = 1{,}1(0{,}1)3$ и $q = 0{,}1(0{,}1)1$. Для $p = 1$ и $q = 1$ (что соответствует полиномам Лежандра) значения приведены отдельно (стр. 215—218). Коэффициенты и корни указанных полиномов занимают по 13 страниц. На стр. 1—4 имеются чертежи, дающие хорошее представление о характере семейства кривых $G_5(p_0, q, x)$, $G_5(p, q_0, x)$, $G_5(p, q, x_0)$. Ошибка табличных значений полиномов $G_n(p, q, x)$ и корней x_k не превосходит двух единиц седьмого десятичного знака, ошибка в коэффициентах A_k (A_k — коэффициент при x^k, $A_n = 1$) не превосходит единицы седьмой значащей цифры.

Линейная интерполяция по x дает четыре верных десятичных знака для полиномов второй степени и три для остальных полиномов, квадратичная — пять и кубическая — шесть для всех полиномов. Интерполяция по q и по p обеспечивает точность трех, четырех и больше знаков в зависимости от степени полиномов и интерполяционной формулы. Никаких разностей в таблицах нет. Для расширения таблиц по n, q и p автор рекомендует пользоваться девятью громоздкими рекуррентными формулами. Для больших n можно пользоваться асимптотическими представлениями полиномов Якоби по формуле Дарбу или по формуле типа Хильба. Насколько известно, таблицы полиномов Якоби вычислены впервые.

В таблицах полиномов Якоби обнаружены следующие ошибки:

Страница	Строка	Колонка	Напечатано	Должно быть
30	16 сверху	3 слева	0301298	0311298
33	18 сверху	1 справа	0020279	0020270
91	2 снизу	2 справа	0997749	1002250
92	2 снизу	2 справа	0957747	1042252
207	13 сверху	2 слева	1935303	1930303
239	15 снизу	3 слева	0 .5391861	0,5391800
240	3 сверху	3 справа	0167154	0167187
243	11 снизу	1 справа	8101933	8101233
245	5 сверху	3 слева	2315940	2315094
248	5 сверху	3 слева	1700221	1701021
249	24 снизу	1 справа	8588112	8588117

Я. И. Алихашкин

9152 К. Семизначные таблицы элементарных трансцендентных функций. Лёш (Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen. Lösch Friedrich. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1954, 335 S.) (нем.)

Книга содержит таблицы тригонометрических и их обратных функций, гиперболических и их обратных функций, а также таблицы натуральных логарифмов и показательных функций. На 335 страницах размещены 10 таблиц. Основные две таблицы, занимающие 320 страниц, характеризуются следующим образом. Таблица 1 вычислена с девятью знаками для $x = 0(0{,}0001)0{,}1$; таблица 2 вычислена с семью знаками для $x = 0{,}1(0{,}0005)3{,}15$; $x = 3\,(0{,}01)10$; $x = 10\,(0{,}1)\,20$. Указанные шаги обеспечивают линейную интерполяцию, для осуществления которой вычислены всюду первые разности. Аргумент x задан как в радианной, так и в градусной мерах. На остальных 15 страницах помещен ряд вспомогательных таблиц. Например, таблицы tg x для $x \approx \pi/2$, двенадцатизначные таблицы $n\pi/2$ для $n = 0(1)100$, семизначные таблицы $e^{\pi x/2}$ для $x = 0(0{,}01)2$, таблицы преобразования из градусной меры в радианную и наоборот, ряд часто встречающихся констант и пр

Таблицы хорошо оформлены и удобны для пользования. В. К. Саульев

См. также: 8773, 8776, 8790, 8791, 8855, 8866. 8884, 9209

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

9153. Французская универсальная цифровая вычислительная машина КАБ-2022. Намьян (Une calculatrice numérique universelle française CAB 2022. Namian P.), Ingrs et techniciens. 1955, № 78, 27—36 (франц.)

Популярное изложение принципа работы электронной цифровой вычислительной машины и техники программирования, а также некоторые технические характеристики малой универсальной цифровой вычислительной машины последовательного действия КАБ-2022. Кодирование в этой машине одноадресное, числа имеют 22 двоичных разряда; может выполняться 26 различных операций, в том числе сложение команд и команда условной передачи управления. Запятая фиксирована

перед старшим разрядом. Отрицательные числа представляются дополнительным кодом. Основная частота 100 *кгц*. Сложение и вычитание выполняется за 0,23 *мсек*., умножение, деление и извлечение корня за 5,3 *мсек*, сдвиг вправо или влево за 0,23 *мсек*. В качестве внешнего запоминающего устройства используется магнитный барабан емкостью в 8122 числа (64 дорожки по 128 чисел). Время одного оборота барабана составляет 29,44 *мсек*. Запись на барабан осуществляется при помощи модуляции фаз, а именно: единица представляется импульсом в первую половину цифрового интервала, а нуль — таким же импульсом, но во вторую половину интервала; выборка чисел для ускорения осуществляется группами по 64 числа.

В качестве внутреннего запоминающего устройства используются две матрицы на магнитных сердечниках емкостью в 64 числа каждая. Ввод чисел и команд — с пятидорожечной перфоленты. Перевод кодов в двоичную систему производится в самой машине с помощью подпрограмм. Считывание с перфоленты механическое, ряд за рядом, со скоростью 15—20 знаков в 1 сек. Вывод — либо на перфоленту со скоростью 20 знаков в 1 сек., либо на телетайп со скоростью 7 знаков в 1 сек. Предусмотрены связи для возможного подключения других устройств ввода и вывода. Для профилактической проверки работы машины в обычном и утяжеленном режиме (по напряжению, частоте) применяются тестпрограммы.

Машина выполнена на съемных блоках с печатным монтажом. Количество ламп в машине 800. Вся логика выполнена на германиевых диодах (8000 шт.) и импульсных трансформаторах. Потребляемая мощность 8 *квт*. Размеры машины 6×0,9×2,1 *м*.

В. К. Зейденберг

9154. Состояние производства и разработки цифровых вычислительных машин (The state of digital computer development). Brit. Communs and Electronics, 1956, 3, № 6, 291—292 (англ.)

Рассматривается общее состояние производства и разработки цифровых вычислительных машин в Англии. Указывается, что в США наметились два направления в деле разработки вычислительных машин: 1) создание больших универсальных машин с широкими возможностями и высокими скоростями работы, использование подобных машин для решения сложных научных и технических проблем; 2) создание малых машин с входными и выходными устройствами, обладающими большой пропускной способностью при незначительной скорости работы арифметического узла.

В Англии сделаны большие успехи на пути создания малых вычислительных машин и некоторое их количество освоено промышленностью. В отношении больших быстродействующих вычислительных машин состояние неудовлетворительное. До сих пор не начат выпуск машин подобного типа, хотя «Меркурий» (Mercury) — копия экспериментальной машины Манчестерского университета МК-II — еще может быть готова к концу этого года. Эта машина может выполнять сложение с плавающей запятой за 120 *мксек*. В то же время в США одна только фирма ИБМ (IBM) выпустила около 50 вычислительных машин ИБМ-704 (IBM-704) и имеет заказы еще на 200. Машины типа 704 сравнимы по скорости работы с машиной «Меркурий» и имеют запоминающие устройства большей емкости. Единственные вычислительные машины, сравнимые по своим данным с машиной «Меркурий», разрабатываются сейчас в Национальной физической лаборатории (National Physical Laboratory) — машина ACE и в Кембриджском университете — машина ЭДСАК II (EDSAC II). В Америке машина НОРК (NORC) имеет вдвое, а строящаяся ЛАРК (LARC) в четыре раза большую скорость работы, чем ЭДСАК II. Опубликованы результаты опытов в Иллинойском университете над схемами на кристаллических триодах с предельной частотой работы 100 *Мгц*, которые показали, что эти триоды могут быть использованы в схемах вычислительных машин, работающих на частоте в 50 *Мгц*. Таким образом имеется возможность проектировать новые машины со скоростями на порядок выше, чем у машины ЛАРК. В Англии же до сих пор нет триодов с предельной частотой выше 5 *Мгц* и нет опубликованных данных экспериментов с частотами выше 500 *кгц*.

Б. И. Шитиков

9155. Некоторые успехи автоматики и кибернетики в прошедшем году. Перес-Бальдрес (Algunos de los progresos del automatismo y la cibernética en el ultimo año. Perez Baldres J.). Rev. cálculo automát. y cibernet., 1955, 4, № 11, 31—35 (исп.)

Перечисляются некоторые новые применения и некоторые курьезы автоматики: рекламные человекообразные «роботы»; управляемые на расстоянии «механические руки» для работы с радиоактивными веществами; изобретенный Вильмсом (Wilms) и Буне (Bounet) активный протез руки, воспроизводящий все ее движения; применение вычислительной машины СВАК в Калифорнийском университете для перевода с английского на немецкий и обратно; машина фирмы RCA, воспроизводящая звуки речи и музыки; используемые фирмой «Кейбл энд Уайрлесс» (Cable and Wireless Ltd., Лондон) и службой абонентского телеграфа «Телекс» (Telex) портативные электронные аппараты для коррекции ошибок в телеграфных передачах вследствие атмосферных помех; применение шведской вычислительной машины БЭСК для прогнозов погоды; электронные вычислительные машины «Гамма», НОРК (РЖМат, 1955, 3459—3461) и ТРИДАК — «величайший в мире электронный мозг» (РЖМат, 1955, 4048—4050); система автоматического регулирования уличного движения фирмы «Истэрн Индастриз» (Eastern Industries Inc.), состоящая из радиолокационных постов, которые автоматически замеряют информацию об уличном движении и посылают ее в центральную вычислительную машину, управляющую световыми сигналами на улицах, что позволяет согласовывать длительность сигналов с интенсивностью движения; американская правительственная система секретной связи. Французская машина «Гамма» построена специально для банковских операций и выпускается промышленностью (9 шт. в мес., половина их идет на экспорт по цене в 30 млн. франков); машина выполняет 5000 операций в 1 сек. над 12-значными числами. В заключение дается краткий, но систематический обзор американских самолетов-снарядов и упоминается о заводах -автоматах. Отмечается, что большое число химических предприятий уже работает автоматически и создаются металлургические, автомобильные и авиационные заводы-автоматы.

Г. Н. Поваров

9156. Цифровые вычислительные машины на кристаллических триодах (Transistor digital computers). Wireless World, 1956, 62, № 5, 210—212 (англ.)

Рассматриваются некоторые узлы и элементы вычислительных машин на точечных кристаллических триодах и ферромагнитных торoидах, построенных в Манчестерском университете и Харвелле. Хотя электронные лампы и произвели в свое время целую революцию в области вычислительной техники, всеже им присущ ряд крупных недостатков: значительное снижение надежности работы устройств с большим количеством электронных ламп, выделение большого количества тепла, отрицательно сказывающегося на работе всех элементов вычислительной машины, значительный расход электроэнергии, относительно большие размеры. Перечислен-

ные выше недостатки отсутствуют у кристаллических триодов. Но у них есть свои специфические недостатки: чувствительность к температуре, высокий уровень шумов, значительный разброс характеристик. Были созданы специальные схемы с фиксирующими диодами, которые позволили нейтрализовать в значительной степени отрицательное действие этих недостатков. Приводится описание схемы с двумя устойчивыми состояниями на одном точечном триоде. На эмиттер триода подаются импульсы, переводящие триод в проводящее состояние; возврат триода в исходное состояние производится подачей на основание тактирующих импульсов, следующих с частотой 125 *кгц*. Выходное напряжение снимается с сопротивления в цепи коллектора. В цепь эмиттера и основания введены фиксирующие диоды, позволяющие избавиться от влияния разброса характеристик отдельных триодов. Подобные схемы нашли применение также и в качестве запоминающих устройств. Кристаллические триоды применяются также в качестве усилителей в триггерных ячейках регистра сдвигов, выполненных на ферромагнитных торoидах. Приводится описание принципа действия таких элементов, работающих на частоте 50 *кгц*. Указывается, что замена устройств, выполненных на электронных лампах, подобными устройствами на полупроводниковых элементах позволила сократить размеры в 100 раз и расход энергии в 3000 раз. Б. И. Шитиков

9157. Операционная цифровая техника для специализированных вычислительных машин. Никола (Operational digital techniques for special purpose computers. Nicola R. N.), Aeronaut. Engng Rev., 1956, **15**, № 3, 78—82 (англ.)

Описываются цифровые устройства, эквивалентные различным элементам моделирующих устройств. Наиболее важным преимуществом при использовании таких устройств является возможность получения высокой точности. Другим важным преимуществом цифровых операционных элементов перед непрерывными является независимость разрешающей способности интеграторов от величины подинтегральных функций и, в частности, при малых их значениях, так как каждый импульс, поступающий в интегратор, представляет собой одно и то же значение подинтегральной величины независимо от состояния интегратора. Описываемые в статье цифровые методы моделирования становятся сравнимыми с обычными при точности порядка 1% и, без сомнения, более предпочтительными при заданной точности 0,1%. В качестве следующего преимущества указывается возможность записи данных, с которыми оперирует вычислительное устройство или система автоматического управления, благодаря чему они могут быть изучены впоследствии. Это особенно важно при использовании цифровых элементов в тренажерах. Указывается, что моделирующие устройства на базе цифровой техники имеют преимущества перед другими типами цифровых машин в том, что они работают в реальном масштабе времени, благодаря отсутствию потерь времени на многократную передачу данных между запоминающим устройством и арифметическим узлом. Существенным недостатком использования цифровых элементов является трудность непосредственного использования цифровых данных человеком. Однако для устранения этого недостатка может быть применено либо сглаживание выходных сигналов, либо уменьшение величины шагов до соответствующих размеров.

Приводится описание и блок-схемы основных операционных цифровых элементов таких, как двоичный умножитель, двоичный делитель, интегратор, дифференцирующий блок, генераторы функций и, наконец, преобразователи из непрерывной формы в цифровую.

В заключение статьи коротко описываются примеры применения операционной цифровой техники для решения навигационных задач, дифференциальных уравнений, а также для построения цифровых следящих систем. Приводятся блок-схемы простейшего навигационного вычислительного устройства и цифровой следящей системы, а также блок-схема решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка.

Б. И. Стрелков

9158. Цифровая вычислительная машина, построенная на блоках (Digital computer building blocks...), Await. Week, 1955, **63**, № 14, 70 (англ.)

Краткое сообщение фирмы «Компьютер Контрол» (Computer Control Co.) о цифровой вычислительной машине 3С-BLOC, построенной на блоках и работающей на частоте 1 *Мгц*. Машина состоит из 15 клапанных блоков с логическими схемами и тактирующего генератора. В зависимости от назначения, в каждом блоке могут осуществляться переключения на штепсельной колодке. С. П. Кузнецов

9159. «Дататрон» — электронная машина для обработки данных (Datatron electronic data processing machine), Electronics and Communs, 1955, **3**, № 5, 97—98 (англ.)

Сообщение фирмы «Электродейта» (Electrodata Corp.) о машине «Дататрон» (Datatron) (РЖМат, 1956, 2500), которая используется для обработки данных в вычислительном бюро фирмы «Дейта Процессинг Ассошиэйтс» (Data Processing Associates Ltd.) в Оттаве. А. И. Щуров

9160. Электронный мозг. Суон (Electronic brain. Swann B. B.), Text. Weekly, 1956, **56**, № 1467, 1207—1208, 1210 (англ.)

Излагаются общие принципы работы электронных вычислительных машин с программным управлением. Для большей наглядности автор пользуется аналогией между действиями вычислителя (человека) и электронной вычислительной машиной при решении простейших задач. Производится общий анализ распределения рабочего времени вычислительной машины при решении научных и коммерческих задач.

Указывается на необходимость соответствия скоростей работы отдельных устройств вычислительной машины. В заключение описывается методика подготовки и выполнения программы конкретной задачи на машине «Пегас» (Pegasus). Б. И. Шитиков

9161. Электронная вычислительная машина из Англии (Electronic computer from Britain), Electr. Inds Export, 1955, 55, № 9, 64 (англ.)

Сообщается об установке в Национальном институте прикладного анализа в Риме вычислительной машины Марк I фирмы «Ферранти». Указывается, что данная машина является первой машиной заводского производства. В качестве образца была взята универсальная вычислительная машина, созданная в Манчестерском университете в 1951 г. Указывается, что подобные машины установлены в ряде университетов, исследовательских институтов и коммерческих организаций.

Б. И. Шитиков

9162. Цифровые машины и моделирующие устройства. Зиболд (Analog and digital computers. Ziebold Thomas O.), Yale Scient. Mag., 1955, **29**, № 8, 34, 36, 40—41, 44, 46, 48, 50 (англ.)

Обзорная статья по классификации различных математических машин.

9163. Счетные машины с программным управлением. Дрейер (Programmgesteuerte Rechenmaschinen. Dreyer H. J.), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 341—343 (нем.; рез. англ., русс.)

Популярная статья по вычислительным машинам.

9164. Вычислительный центр при Политехническом институте в Милане. Тромбетти (Il Centro di calcoli numerici del Politecnico di Milano. Trom-

betti Carlo), Boll. geod. e sci. affini, 1955, **14**, № 4, 574—580 (итал.)

Сообщается об организации в 1955 г. Вычислительного центра в Миланском политехническом институте, в котором установлена вычислительная машина КРК-102А (CRC-102A), приобретенная в США. Приводятся технические характеристики машины. П. В. Николаев

9165. **«Механический мозг». Уэрри** («Mechanical brains». Werry Wilfrid W.), Technique (Montréal), 1955, **30**, № 6, 356—361 (англ.)

Популярный обзор по вычислительной технике. Упоминаются машины фирмы ИБМ: 701, 702, 704, 705. Сравниваются различные виды запоминающих устройств. Н. Н. Парусникова

9166. **Обслуживание цифровыми машинами и моделирующими устройствами** (Digital and analog computing services), Electronics and Communs, 1955, **3**, № 8, 97 (англ.)

Сообщается, что фирма «Дейта Процессинг Ассошиэйтс» (Data Processing Associates Limited) в Оттаве (Канада) открыла вычислительное бюро. Фирма сдает повременно вычислительное оборудование и располагает опытным обслуживающим персоналом. А. И. Щуров

9167. **Электронные вычислительные машины. Кюпфмюллер** (Elektronische Rechenmaschinen. Küpfmüller K.), VDI-Zeitschrift, 1956, **98**, № 7, 283—284 (нем.)

Информационное сообщение о 7-ом заседании Комитета прикладных исследований Немецкого исследовательского общества (der Ausschuß für Angewandte Forschung der Deutschen Forschungsgemeinschaft). Сообщается об исследовательских институтах в городах Геттингене, Дармштадте, Мюнхене, где используются электронные вычислительные машины.

Ю. К. Черевычник

9168. **Программирование универсальной цифровой вычислительной машины для работы в качестве дифференциального анализатора. Селфридж** (Coding a general-purpose digital computer to operate as a differential analyzer. Selfridge R. G.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 82—84 (англ.).

Рассматриваются вопросы, связанные с применением универсальных цифровых вычислительных машин для решения дифференциальных уравнений на опыте использования для этой цели машины типа ИБМ-701, решавшей задачи, предназначенные для моделирующего устройства РЕАК.

Излагается методика программирования и кодирования этих машин для одинаковых задач и описываются их преимущества и недостатки. Для ИБМ-701 в качестве формулы численного интегрирования была использована формула Симпсона и соответствующая методика программирования. В качестве примера использования этой методики приводятся блок-схема электронного моделирующего устройства и соответствующая ей программа цифровой вычислительной машины для решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Делается вывод, что хотя скорость решения задачи на моделирующем устройстве после его настройки значительно превосходит скорость решения той же задачи на цифровой машине, однако программирование подобных уравнений для цифровой машины занимает меньшее время. Существенным преимуществом цифровых машин является простота подбора масштабов благодаря возможности использования системы чисел с плавающей запятой. Кроме того, цифровые машины обладают большими возможностями в смысле точности и предельных значений величин, благодаря чему многие задачи, решение которых невозможно на моделирующих устройствах, могут быть сравнительно легко решены с помощью цифровых вычислительных машин.

Сообщается, что для решения задачи внешней баллистики цифровой машине потребовался всего один час, из которого машинное время составило полчаса, в то время как для решения той же задачи на моделирующем устройстве потребовалось шесть часов.

Б. И. Стрелков

9169. **Решение задач кинетики сложных химических реакций на вычислительной машине «Литтон—20»** The solution of problems in kinetics of complex chemical reactions by the Litton-20 computoer), DDA Summation, 1956, № S-1, 11 pp. (англ.)

Рассматривается решение задачи, опубликованной в сентябрьском номере журнала «Chemical Engineering» за 1954 г. (стр. 218), на цифровой вычислительной машине для решения дифференциальных уравнений «Литтон—20» (РЖМат, 1956, 2502) фирмы «Литтон» (Litton Industries, Inc.). Задача сводится к решению четырех линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с начальными условиями. Дается расчет масштабов, схема соединения интеграторов, описание кодировки, приводятся графики решений. Точность решения составляет около 0,1% от максимального значения. Время, необходимое для получения решения с этой точностью, 6 мин. Точность может быть повышена за счет увеличения времени решения Д. П.

9170. **Расчет частот и форм колебаний на электронной вычислительной машине СЕАК. Кейхилл, Леви** (Computation of vibration modes and frequencies on SEAC. Cahill William F., Levy Samuel), J. Aeronaut. Sci., 1955, **22**, № 12, 837—843 (англ.)

Описывается метод расчета частоты и формы симметричных и асимметричных собственных колебаний самолета на электронной вычислительной машине СЕАК.

Для расчета конструкция самолета представляется в виде упругих невесомых элементов с размещенными на них сосредоточенными массами. Частота и форма колебаний этой системы определяются по собственным числам и собственным векторам матрицы, элементы которой выражаются через заданные параметры и известные коэффициенты влияния. Собственные числа и собственные векторы определяются методом итераций.

Расчет на вычислительной машине СЕАК выполняется по трем подпрограммам. Первая подпрограмма — вычисление элементов исходной матрицы и размещение их в запоминающем устройстве на магнитной ленте, вторая подпрограмма — итерационный процесс, третья подпрограмма — преобразование исходной матрицы для вычисления высших тонов.

Приведены результаты расчета частоты и формы первых шести тонов симметричных колебаний самолета с треугольным крылом. Указывается, что для расчета частоты и формы шести симметричных и шести асимметричных тонов собственных колебаний самолета с крылом малого удлинения, при разбивке массы каждого полукрыла на 24 точки и массы фюзеляжа на 7 точек, потребовалось 6 час. машинного времени.

А. Ф. Минаев

9171. **Вычислительная машина рассчитывает кривые колебания нагрузки. Мертон** (Computer makes duration curves. Murton C. R.), Electr. World, 1955, **144**, № 22, 72—73, 156 (англ.)

Кривые колебания нагрузки являются важным средством для изучения процесса производства и потребления электроэнергии. Они могут быть использованы для более точной оценки потерь в системе передачи электроэнергии, для правильного распределения нагрузок ме-

жду генераторными станциями, а также для более экономичного использования гидростанций в соединении с тепловыми и гидросистемами. В качестве основы для построения кривых, охватывающих все часы в году, пик летних месяцев, пик зимних месяцев, нормальную рабочую неделю, а также нерабочее время, включая праздники, предлагается использовать статистический анализ часовых нагрузок системы с помощью счетно-аналитических машин фирмы «ИБМ». В оборудование, необходимое для этой цели, должны входить следующие машины из системы «ИБМ»: клавишный перфоратор, сортировальная машина, воспроизводящий перфоратор, электронный вычислительный перфоратор типа ИБМ-604 или 602А и табулятор.

Приводится пример кривой колебания нагрузки и схема расположения данных и результатов на используемых перфокартах. Подробно описывается последовательность операций с перфокартами, необходимых для построения кривых колебания нагрузки для различных периодов времени. Б. И. Стрелков

9172. **Следящая система для передачи цифровых данных. Баркер** (A servo system for digital data transmission. Barker R. H.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, № 7, 52—64 (англ.)

Применение цифровых следящих систем диктуется потребностью передачи данных с высокой точностью. При этом возникают следующие проблемы: конструирование соответствующего преобразовательного устройства, передача цифровых данных с помощью обычных систем связи и конструирование следящей системы, пригодной для работы с полученными данными. Особенностями, которые необходимо учитывать при конструировании следящей системы, оперирующей с цифровыми величинами, являются, во-первых, неизбежность значительных задержек из-за дискретности данных и, во-вторых, эффект нелинейности, возникающий в результате амплитудного квантования данных. Все это приводит к уменьшению устойчивости системы. Поэтому метод синтеза таких систем должен включать в себя учет задержек и нелинейностей, а также давать возможность осуществления такого предсказания последующих величин текущих данных, которое гарантировало бы отсутствие запаздываний в установившемся режиме работы системы. В статье дается метод, удовлетворяющий перечисленным требованиям и состоящий в следующем. Для случая большого сигнала ошибки или быстрого его изменения применим принцип наложения и возможно использование линейной теории для учета влияния задержек, причем влияние квантования может быть учтено путем представления его в виде шума. С приближением системы к установившемуся состоянию сигналы ошибки разбиваются на малое количество уровней и система может рассматриваться как релейная. В соответствии с этими допущениями синтез системы разбивается на два этапа. На первом этапе составляется эквивалентная блок-схема исследуемой цифровой следящей системы без учета нелинейностей. В качестве математического аппарата используется дискретное преобразование Лапласа. В связи с этим синтез системы заключается в отыскании импульсных передаточных функций каждого из элементов эквивалентной блок-схемы, а также подходящей импульсной передаточной функции всей петли в соответствии с требующимися характеристиками системы.

Затем собирается моделирующая система, эквивалентная исследуемой цифровой следящей системе, для исследования тех свойств последней, которые поддаются линейной математической трактовке. В процессе моделирования уточняются параметры системы.

Второй этап, на котором производится исследование влияния на систему нелинейностей, вносимых процессом квантования, а также возникающих в процессе считывания цифровых данных в динамике, осуществляется на реальной цифровой следящей системе.

Экспериментальное исследование на обоих этапах заключается в снятии осциллограмм реакции систем на единичный скачок и в сравнении их с расчетными. Отмечается хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными. Особо исследуется система с нулевой скоростной ошибкой, в которой используется для этой цели управление по суммарной ошибке, благодаря введению дополнительной параллельной интегрирующей петли в прямой цепи.

Подробно описывается приводимая в статье блок-схема матричного двоичного сумматора последовательного действия, играющего в цифровой следящей системе роль датчика ошибки. Описывается также простое устройство преобразования цифровых величин в постоянное напряжение, принцип работы которого основан на заряде конденсатора через прерыватель, работающий со скоростью следования двоичных цифр.

В заключение делается вывод, что возможно создание такой цифровой следящей системы, которая была бы способна устранить основной недостаток систем передачи цифровых данных, заключающийся в наличии больших задержек, путем соответствующего предсказания последующих значений текущих данных. Однако ввиду того, что с увеличением времени предсказания уменьшается устойчивость и увеличивается чувствительность к шумам и инструментальным ошибкам, то существенно, чтобы задержка в передаче дискретных величин была бы минимальной. Кроме того, указывается, что ввиду того, что всякая импульсная система неэффективна в качестве сглаживающего устройства, то необходимо производить сглаживание данных до ввода их в цифровую следящую систему

Б. И. Стрелков

9173. **Приспособления для хранения знаний и пользования ими. Галл** (Implications for the storage and retrieval of knowledge. Gull C. D.), Library Quart., 1955, **25**, № 4, 333—343, 398 (англ.)

Указывается, что по мере накопления знаний возникает насущная необходимость в привлечении машин для обслуживания хранилищ: библиотек, фильмотек и т. п. Для этой цели можно было бы использовать вычислительные и логические электронные машины. Однако в современном виде они обладают рядом недостатков, которые затрудняют использование их для этой цели. Затем автор останавливается на вопросе научной постановки библиотечного дела и службы информации с тем, чтобы обеспечить дальнейший прогресс в деле накопления и использования человеческих знаний. Рассматриваются основные положения теории информации применительно к библиотечному делу.

Б. И. Шитиков

9174. **Матричное запоминающее устройство, использующее в качестве элементов, обладающих двумя стабильными состояниями, сегнетоэлектрические конденсаторы. Пульвари** (Memory matrix using ferroelectric condensers as bistable elements. Pulvari Charles F.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 3, 169—185 (англ.)

Приводятся результаты испытаний макета матричного запоминающего устройства на сегнетокерамических конденсаторах (тибаровая керамика производства фирмы «Гленко» (Glenko)). В качестве критерия оценки пригодности материала для употребления в матричной схеме предлагается «индекс селекции» (Selection Index)— отношение двух значений остаточной поляризации, полученных при двух импульсах, амплитуды которых относятся как 2 : 1. Индекс селекции позволяет сравнить поведение материала в невыбранной и выбранной точках матрицы. Он имеет оптимальное значение в обла-

сти напряжений, в 2—3 раза больших коэрцитивного напряжения.

Указывается, что действие импульсов половинной амплитуды для данного материала оказывается кумулятивным. Исследовались керамические пластины толщиной в 0, 05 *мм* из материала, имеющего коэрцитивную напряженность поля в 1800 *в/см*, и пластины толщиной в 0,075 *мм* из материала с коэрцитивной напряженностью поля в 4000 *в/см*. В исследованной керамике индекс селекции был порядка 100, в то время как в хороших монокристаллах его значение может превышать величину в несколько тысяч. Время релаксации исследованного материала лежит в пределах 1,0—0,5 *мксек*.

Поскольку керамика не является гомогенной, матрица была собрана из отдельных маленьких сегнетокерамических конденсаторов емкостью в 300 *пф*, обладающих приблизительно одинаковыми параметрами (сопротивление утечки, индекс селекции, поляризуемость). Испытания матрицы проводились с помощью схемы, собранной на полупроводниковых триодах, выборка ячеек производилась с помощью электромагнитных схем. Испытания показали возможность работы матрицы при длительности импульсов порядка 0,5÷2 *мксек*. Отношение сигнал/помеха было порядка 2 и выше, в некоторых точках оно доходило до 8.

Оптимальный разрез матрицы при использовании исследованного материала оценивается в 10 × 10 ячеек. Влияние температуры не исследовалось.

Л. В. Кутуков

9175. **Некоторые особенности запоминающих устройств, использующих магнитную запись кодов чисел и работающих по параллельному принципу. Ермолаев Л. С.,** Сб. статей Моск. высш. техн. уч-ща, 1955, 55, 34—46

Рассматриваются особенности работы внешнего запоминающего устройства на широкой магнитной ленте. Приводятся временные диаграммы работы устройства и уравнение для проверочного расчета надежности работы устройства, учитывающее перекос ленты или головок, поперечные колебания ленты и т. д.

В. В. Бочарова

9176. **Новая электронная аппаратура моделирования Института автоматики и телемеханики АН СССР. Гуров В. В., Коган Б. Я., Таланцев А. Д., Трапезников В. А.,** Автоматика и телемеханика, 1956, **17**, № 1, 19—35

Дается краткое описание нового малогабаритного электронного моделирующего устройства ЭМУ-5, разработанного в Институте автоматики и телемеханики АН СССР в 1954 г. Указывается, что линейная часть устройства, предназначенная для решения линейных дифференциальных уравнений до 6-го порядка включительно, состоит из 12 решающих усилителей с автоматической стабилизацией нулевого уровня, 30 магазинов сопротивлений (от 91 *ком* до 1,2 *Мом*), позволяющих устанавливать коэффициенты передачи в режиме усилителя от 1 до 100, а в режиме интегратора от 1 до 10, и делителей напряжения для непрерывной установки коэффициентов напередач в диапазоне от 1 до 0,001; предусмотрены, кроме того, 4 диодных элемента для воспроизведения типичных нелинейных зависимостей.

Указывается, что в ЭМУ-5 используются два основных типа решающих усилителей, построенных на основе усилителей постоянного тока с большим коэффициентом усиления и глубокой обратной связью. При выполнении основных линейных и нелинейных операций (с целью повышения точности решения) используется усилитель с автоматической стабилизацией нулевого уровня (дрейф нуля, приведенный ко входу, составляет примерно 30 *мкв*; схема автоматической стабилизации нулевого уровня отличается от известных тем, что вспомогательный тракт имеет нечетное число каскадов усиления, а суммирование сигнала ошибки происходит на общей анодной нагрузке первой лампы). В режиме усилителя перемены знака используется усилитель с триодной компенсацией. Приводятся схемы обоих типов усилителей, отличающихся от известных наличием экономичного выходного каскада, благодаря которому мощность источников анодного питания снижена примерно в 4 раза.

Указывается, что решение нелинейных дифференциальных уравнений выполняется с помощью нелинейной приставки, имеющей две модификации: либо с 2 множительно-делительными устройствами и 8 диодными функциональными преобразователями для воспроизведения заданных фиксированных функций, либо с 4 множительно-делительными устройствами и 6 функциональными преобразователями. Для реализации нелинейных решающих элементов в приставке, помимо пакетов с диодными блоками, выполненными на малогабаритных вакуумных диодах 6Д6А, смонтированы 12 решающих усилителей с автоматической стабилизацией нуля и 6 сдвоенных решающих усилителей перемены знака. Отмечается, что характерной особенностью устройства является применение в нелинейных блоках потенциально заземляемых диодов.

Приводятся новые схемы множительно-делительного устройства, схемы установки коэффициентов передачи блоков, начальных условий и схема индикации перегрузки.

Указывается, что ЭМУ-5 имеет ряд дополнительных, расширяющих его возможности устройств: универсальный функциональный преобразователь на электронолучевой трубке, блок запаздывания, электрогидравлическое преобразующее устройство и вариатор коэффициентов для решения уравнений с переменными во времени коэффициентами. Г. М. Грязнов

9177. **Миниатюрное моделирующее устройство. Джонсон** (A miniature analogue computer. Johnson A. B.), Electronic Engng, 1955, 27, № 330, 348—349 (англ.)

Описывается малогабаритное моделирующее устройство, состоящее из двух переносных блоков. Машина предназначена для решения линейных дифференциальных уравнений. Один из блоков заключает в себе все источники питания. Второй является собственно вычислительной машиной и состоит из 10 рабочих усилителей, 20 потенциометров, коммутационной панели, цепей сигнализации и управления и 10 емкостных контуров. Трехламповые усилители выполнены в виде отдельных блочков.

Коммутационная панель вмонтирована в верхнюю крышку вычислительного блока и предназначена для соединения в требуемую схему усилителей, потенциометров, источников питания и др. А. А. Крюков

9178. **Упрощенное моделирующее вычислительное устройство. Коpи** (Simplified analog computer. Corey Victor B.), Electronics, 1956, 29, № 1, 128—131 (англ.)

Описывается простое моделирующее электронное устройство для решения дифференциальных уравнений, состоящее из десяти операционных усилителей с высоким коэффициентом усиления. С помощью этих усилителей выполняются основные операции: интегрирование, умножение и деление на постоянную величину, суммирование, вычитание и изменение знака, необходимые для решения различных задач, возникающих в лабораторной практике.

Дается подробное описание характеристик и схема электронного усилителя постоянного тока с высоким коэффициентом усиления. Описывается принцип работы этого усилителя в качестве операционного усилителя при выполнении той или иной из перечисленных

выше операций и методика решения дифференциальных уравнений с помощью комбинации таких усилителей.

Вычислительное устройство конструктивно оформлено в одном корпусе, разделенном на три секции: секцию усилителей, секцию питания и пульт управления.

Б. И. Стрелков

9179. Интегрирующие машины с неограниченными пределами. Хейнхольд (Integriermaschinen mit nicht beschränkten Varianzbereichen. Heinhold J.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 1/2, 64—65 (нем.)

Указывается, что в современных механических интегрирующих машинах применяются в основном только интегрирующие, функциональные и суммирующие устройства. В то время, как суммирующее устройство не имеет ограничения изменения пределов зависимых и независимых переменных, функциональные интегрирующие устройства ограничены.

Описываются принципы построения функциональных и интегрирующих устройств, также не имеющих ограничения пределов изменения зависимых и независимых переменных. В основу берется шаровое функциональное устройство. Шар этого устройства такой же, как в шаровом интеграторе Геле-Шоу (Helle-Shaw, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1885, **176**, 367—402), располагается так, что может свободно вращаться вокруг своего центра. В диаметральной плоскости перпендикулярно шаровой поверхности прижаты две перпендикулярные друг другу пары фрикционных колес. На поверхность шара наносится кривая, воспроизводящая заданную зависимость. При вращении шара вдоль кривой скользит неподвижный палец, заставляющий поворачиваться шар в соответствии с кривой. Ось одной пары колес служит для задания аргумента, с оси другой пары снимается функция. Масштаб может регулироваться или вручную, или с помощью соответствующего управления от считывающего механизма. Принципиально такое «шаровое функциональное устройство» не ограничивает пределы изменения как независимой, так и зависимой переменной.

Для получения интегрирующего устройства с неограниченными пределами в функциональном устройстве палец заменяется роликом, ось которого составляет с осью независимой переменной x угол α, связанный с x зависимостью $tg\ \alpha = f(x)$.

Указывается, что шаровой интегратор Геле-Шоу применяется в машине Керти и Дюбуа (Dubois Fr., Mitt. Naturforsch. Ges. Shaffhausen, 1944, **19**, 209—275; Curti D., Dubois F., Schweiz. Bauztg, 1949, **67**, № 3) для решения задач внешней баллистики.

Г. К. Раков

9180. Электронная математическая машина ARR. Лукашевич (Elektronowa maszyna matematyczna ARR. Łukaszewicz Leon), Problemy, 1955, **11**, № 1, 5—10 (польск.)

Дается краткий отчет о разработке моделирующего устройства ARR (Analizator Równań Różniczkowych) и других математических машин, которые были сконструированы в Польше. Популярно объясняются принципы действия моделирующих устройств и описывается конструкция и действие ARR. Автор приводит также простые примеры использования ARR.

R. Marczyński

9181. Электронное моделирующее устройство для математического предсказания погоды. Жьян, Ремон ((Un calculateur électronique analogique pour la prévision mathématique du temps. Gião Antonio, Raymond F.-H.), Geofis., pura e appl., 1953, **25**, 141—202 (франц.; рез. англ.)

Выводятся уравнения движения для ламинарных и турбулентных процессов в атмосфере. Выводится уравнение для определения давления на поверхность земли в турбулентном движении атмосферы. Описывается специальное моделирующее устройство для решения последнего уравнения.

9182. Подсчет геометрических структурных факторов для пространственных групп низкой симметрии. I. Радослович, Мего (Calculation of geometrical structure factors for space groups of low symmetry. I. Radoslovich E. W., Megaw Helen D.), Acta crystallogr., 1955, **8**, № 2, 95—98 (англ.)

Описывается устройство для вычисления величин $\cos(hx+ky+lz)$ и $\sin(hx+ky+lz)$. В отличие от многих других устройство основано не на представлении этих функций в виде суммы произведений тригонометрических функций от одного аргумента, а на сложении аргументов. Основные части прибора: подвижная таблица значений cos и sin от аргумента ky и неподвижная таблица аргументов hx и lz. Устанавливая ky_1 подвижной таблицы против значения lz_1 неподвижной, мы тем самым устанавливаем нуль неподвижной таблицы против значений ky_1+lz_1 подвижной. После этого любому значению аргумента hx неподвижной таблицы соответствуют на подвижной таблице $\cos(hx+ky+lz)$ и $\sin(hx+ky+lz)$. Устройство просто по конструкции и несложно в изготовлении. Простота действия совмещается с представлением структурной амплитуды в наиболее общей форме. 220 величин $\cos(hx+ky+lz)$ были вычислены за 16 мин. В таблицах приведены двузначные значения аргументов и функций. Округление hx, ky, lz вносит ошибку в структурный фактор, которую можно оценить по формуле $2\sqrt{p}\cdot 0{,}022$, где $2p$— число симметрически связанных атомов в общем положении в центросимметричной структуре. Д. М. Х

9183. Методика набора и решения задач на электронных моделирующих установках. Коган Б. Я., Автоматика и телемеханика, 1956, **17**, № 1, 36—52

Применительно к электронным моделирующим устройствам постоянного тока излагается разработанная на основе многолетней практики Института автоматики и телемеханики АН СССР методика решения линейных и нелинейных задач автоматического регулирования.

Рассматриваются способы составления структурных схем соединения отдельных решающих элементов для решения заданных дифференциальных уравнений; дается методика определения коэффициентов передач отдельных решающих элементов по коэффициентам исходных уравнений; приводятся рекомендации относительно выбора масштабов представления зависимых переменных и времени; определяются значения начальных условий и возмущающих сил в тех физических величинах, в которых они представляются в моделирующем устройстве.

Рассматривается случай моделирования систем автоматического регулирования с большими постоянными времени. Указывается, что при моделировании подобных систем можно воспроизводить большие постоянные времени с помощью обычных интегрирующих блоков и делителей.

Применение изложенной методики иллюстрируется примерами следующих задач, решенных на установке ЭМУ-5: 1) решение линейного дифференциального уравнения 6-го порядка с постоянными коэффициентами; 2) решение уравнения Матье; 3) решение задачи о колебании ротора синхронной машины при ступенчатом возмущении и 4) исследование переходных процессов в системах автоматического регулирования с нелинейным демпфированием.

Г. М. Грязнов

9184. **Решение нелинейного дифференциального уравнения диффузионного процесса при помощи моделирующего устройства.** Леземан (Bearbeitung der nichtlinearen Differentialgleichung eines Diffusionsvorganges mit einer Integrieranlage. Lesemann Klaus-Jürgen), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, **2**, № 3, 381—383 (нем.)

Описывается решение уравнения $y'' - 2(1 - z) \cdot y'/\sqrt{y} = 0$ ($y' = dy/dz$) с начальным условием $y(0) = y'(0) = 0$ на моделирующем устройстве IPM - Ott, которое, кроме интегрирующих, суммирующих, масштабных и знакоменяющих элементов, имеет перемножатели (с возможностью использования их для деления) и «функциональные столы», работающие по принципу обведения начерченного графика функции. Решения y и y' получаются в виде кривых, для чего требуется 2—3 часа времени, включая подготовительную вычислительную работу. Приводится блок-схема решения без использования перемножателя и «функционального стола». Т. И. Маруашвили

9185. **Электронное моделирующее устройство для исследования систем регулирования.** Обрадович (Elektronisches Analogie-Gerät zur Untersuchung von Regelkreisen. Obradović I.), Regelungstechnik, 1956, **4**, № 2, 36—40 (нем.; рез. англ.)

Сообщается о сконструированном в Электротехническом исследовательском институте «Никола Тесла» (Nikola Tesla, Белград) и находящемся в течение трех лет в эксплуатации электронном моделирующем устройстве, специально предназначенном для исследования динамики процессов в сложных системах автоматического регулирования. В установке используются собранные по балансной схеме усилители постоянного тока, снабженные универсальными блоками из пассивных элементов R и C. Коммутируемые с помощью переключателей, эти элементы в той или иной комбинации могут включаться во входные цепи и цепи обратной связи усилителей, что позволяет очень просто образовывать любые основные передаточные функции элементов, входящих в системы регулирования. Всего в устройстве имеется 12 таких универсальных блоков. Моделирование помех, возмущений осуществляется с помощью специального генератора. Генерируемая возмущающая функция представляет собой прямоугольную функцию с периодом 1—0,1 сек., «амплитуда» которой может варьироваться в пределах $\pm$ 50 *в* (рабочий диапазон всего устройства). Преобразование этой функции в желаемую функцию возмущения осуществляется с помощью операционных усилителей.

Указывается, что при моделировании систем регулирования последние могут быть заданы: 1) структурной схемой и передаточными функциями отдельных звеньев; 2) соответствующим дифференциальным уравнением или системой уравнений с начальными условиями; 3) уравнением, преобразованным по Лапласу и реализуемым в устройстве в виде соответствующей передаточной функции. Приводятся примеры, иллюстрирующие эти три случая.

При исследовании сложных систем регулирования, как, например, системы регулирования частоты и распределения нагрузки в объединенной энергосистеме, указывается на возможность сочетания моделирующего устройства с реальной аппаратурой при помощи соответствующих переходных устройств.

Отмечается хорошая точность устройства при определении границ области устойчивости и оптимизирующих областей. Г. М. Грязнов

9186. **Анализ работы электрических систем.** Лайон (Power system analysis. Lyon G.), Electr. Rev., 1954, **155**, № 11, 383—387 (англ.)

Экономика требует, чтобы расходы, связанные с передачей и распределением электроэнергии, стремились к минимуму. Для контроля за работой электрической системы и выбора наиболее экономичного режима необходимо применение различных машинных методов расчета. Для мощных систем, объединяющих ряд крупных электростанций, наиболее рациональной системой является комбинация из расчетного стола переменного тока и цифровой машины, которые и должны быть использованы для управления электрическими системами. При этом на расчетном столе воспроизводятся режимы системы, а цифровая машина, используя различные вспомогательные материалы и таблицы, определяет наиболее экономичное распределение мощности, схему сети, дающую минимум потерь, сигнализирует о требуемых изменениях схемы и режима. А. А. Крюков

9187. **Автоматический диспетчер.** Остерл, Хардер (Automatic dispatch pays off. Osterle W. H., Harder E. L.), Electr. World, 1955, **143**, № 16, 123—124, 220 (англ.)

Сообщается, что фирмой «Вест Пенн электрик» (West Penn Electric Co.) создана вычислительная машина для выбора наиболее экономичного режима работы энергосистемы мощностью 1300 *Мвт*, объединяющая десять крупных тепловых станций и одну гидростанцию. Общая протяженность линий передач системы около 2500 *км* при напряжении 132 *кв* и 66 *кв*.

В работе вычислительной машины учитываются для данного режима суммарные потери в сетях, стоимость топлива на отдельных станциях, к. п. д. генераторов, участвующих в покрытии нагрузки, и другие факторы, влияющие на стоимость вырабатываемой электроэнергии.

Результаты проведенных вычислений немедленно используются для наивыгоднейшего распределения нагрузок между работающими станциями. А. А. Крюков

9188. **Автоматическая приставка к генераторным единицам расчетного стола.** Куско, Хеллер (Computer for automatizing network analyzers. Kusko A., Heller P. N.), Electr. Engng, 1955, **74**, № 12, 1066 (англ.)

Для ускорения расчетов динамической устойчивости на расчетных столах предлагается добавить к каждой генераторной единице специальное вычислительное устройство, автоматически определяющее изменение относительного угла поворота ротора рассматриваемой синхронной машины и воздействующее через сервомеханизм на фазу э. д. с. данной генераторной единицы.

Решение дифференциальных уравнений, описывающих движение ротора синхронной машины в переходном процессе, с достаточной для практических целей точностью, может быть представлено в виде двойного интеграла по времени. При этом вычислительное устройство решает механическую часть уравнений движения ротора. Интегрирование производится с помощью обычных электрических счетчиков.

Вычислительное устройство состоит из двух интеграторов, выходной сигнал которых воздействует на фазосдвигающее устройство, меняющее фазу э. д. с. генераторной единицы. А. А. Крюков

9189. **Вычислительные машины, применяемые при проектировании и эксплуатации электрических систем** (Machines that think help push back frontiers of engineering), Electr. World, 1955, **143**, № 15, 34—35 (англ.)

Сообщение фирмы «Вестингауз» о вычислительных устройствах, выпускаемых фирмой для нужд энергетических систем. Упомянуты обычные расчетные столы переменного тока, моделирующее устройство «Анаком», специальные вычислительные машины, предназначенные для определения наиболее экономичного режима работы системы. А. А. Крюков

9190. Устройство для расчета качаний синхронных машин. Хефрон, Рот (Swing curve calculator makes better stability studies faster. Hefron W. G., Rothe F. S.), Electr. World, 1955, **143**, № 15, 49—50 (англ.)

Добавление к расчетному столу специального устройства, служащего для определения качаний синхронных машин в переходном процессе, значительно сокращает время, необходимое для исследования динамической устойчивости электрических систем, так как становится ненужным расчет методом последовательных интервалов. Устройство автоматически учитывает или вычисляет: 1) механический момент турбин, 2) нагрузку генератора, 3) ускорение или торможение ротора генератора. А. А. Крюков

9191. Теория и применение правильной шаровой передачи. Эрисман (Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes. Erismann Theodor), Z. angew. Math. und Phys., 1954, **5**, № 5, 355—388 (нем.)

Приводится теория шаровой передачи, используемой в различных приборах: шаровых интеграторах Шоу, Амслера, гармонических анализаторах Коради, приборах Амслера для измерения малых разностей высот уложенных рельс, шаровых дифференциаторах Амслера, шаровых мультипликаторах и т. д.

9192. Усилители на полупроводниковых приборах для вычислительных машин непрерывного действия, разработанных для имитаторов полета. Уэйрик (Transistor analog computing amplifiers developed for flight simulators. Weyrick Robert C.), Industr. Labs, 1956, **7**, № 1, 36—39 (англ.)

Приведены конструкция, схемы и характеристики суммирующего усилителя и усилителя мощности на полупроводниковых приборах. Эти усилители предназначены для использования в системах имитаторов полета вместо ламповых схем; при этом сохраняются входные и выходные параметры ламповых схем. Суммирующий усилитель имеет точность суммирования 1%; использование двух типов триодов (*p-n-p* и *n - p - n*) позволило построить схему на 7 полупроводниковых триодах; потребляемая мощность составляет 0,6 *вт* вместо 8,4 *вт* для эквивалентной ламповой схемы. Усилитель мощности предназначен для управления серводвигателем мощностью в 5 *вт*. Предложенные безламповые варианты схем усилителей уменьшают потребляемую мощность, снижают габариты и вес, а также повышают надежность работы всей системы. Чувствительность триодов к изменению температуры не выводит схемы из допустимых температурных пределов. В. К. Зейденберг

9193. Международная конференция по моделированию. Либман (International analogy computation meeting. Liebmann G.), Nature, 1955, **177**, № 4497, 20—21 (англ.)

С 26 сентября по 2 октября 1955 г. в Брюсселе (Бельгия) состоялась Международная конференция по моделированию, организованная Бельгийским обществом инженеров дальней связи совместно с Бельгийским обществом электриков и Бельгийским обществом механиков. В ней приняло участие около 400 ученых и инженеров 17 стран. Наряду с бельгийскими специалистами на конференции присутствовали многочисленные делегации США, Франции и Англии, а также делегации СССР и Польши.

На конференции демонстрировались средства моделирования, было представлено много новых применений моделирующих устройств. Был заслушан 101 доклад, среди них обзорные доклады: Ремон, «Электронные моделирующие устройства»; Хадер, «Электрические расчетные столы»; проф. Малавар, «Метод моделирования с помощью сопротивлений, его возможности и тенденции развития»; Мичел, «Механические устройства для решения дифференциальных уравнений, их современное состояние и применения»; Либман, «Моделирующие устройства на сопротивлениях»; проф. Бродин, «Преподавание линейного функционального анализа»; проф. Уолман, «Специальные моделирующие устройства». Около половины всех выступлений было посвящено электронным моделирующим устройствам, 30% докладов касалось электрических моделей (электролитические ванны и т. п.), остальные 20% были посвящены механическим интеграторам и различным специальным моделирующим установкам. Обзорные доклады, оригинальные сообщения и дискуссия по докладам будут в ближайшее время опубликованы полностью в виде трудов Международной конференции по моделированию (Proceedings of the International Analogy Computation Meeting, Brussels, 1955).

На конференции было решено создать Международную ассоциацию по моделированию (Association Internationale pour le Calcul Analogique), целью которой должно являться содействие развитию этой области техники путем организации национальных и международных совещаний и издание бюллетеня или журнала на разных языках, посвященного научным и техническим основам моделирующих устройств и их применениям. Будет установлено сотрудничество с существующими организациями в области электротехники, машиностроения и вычислительной техники. Основную работу по организации новой ассоциации будут проводить ее президент — проф. Гофман (Prof. J. Hoffmann) и его коллеги по университету (Université Libre, Brussels). Н. Н. Михайлов

9194. Логарифмический преобразователь напряжения в цифровую форму. Глазер, Бласбалг (A logarithmic voltage quantizer. Glaser E. M., Blasbalg H.), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, **4**, № 4, 150—155, 159 (англ.)

Описывается автоматическое устройство преобразования напряжения в цифровую форму в виде числа, пропорционального логарифму напряжения. Принцип преобразования заключается в следующем. Преобразователь получает мгновенные амплитуды напряжения и преобразует их с помощью простой *RC*-цепочки в импульсы, длительность которых пропорциональна величине этих амплитуд. Далее осуществляется линейное преобразование длительности импульсов с помощью подсчета импульсов фиксированной частоты, приходящихся на время прохождения этих импульсов. Полученное число пропорционально логарифму мгновенного значения входного сигнала. Дается математический анализ процесса преобразования и выводятся формулы, используемые для расчета описываемого устройства. Приводятся блок-схема, принципиальная электрическая схема и временные диаграммы логарифмического преобразователя, а также экспериментальные результаты его работы в виде графика зависимости между входом и выходом устройства, рассчитанного на 5%-ную точность преобразования. Частота преобразования 10000 раз/сек. Частота заполняющих импульсов 1 *Мгц*. Точность преобразования определяется выбором параметров схемы и составляет в описываемом устройстве 8%. Описанное устройство может применяться для умножения и деления величин, представленных в виде постоянного напряжения с выдачей результата в цифровой форме. Устройство может применяться для измерения и кодирования мгновенных амплитуд сложных форм колебаний, полоса частот которых ограничена параметрами схемы преобразователя, а также для измерения амплитуды одиночных импульсов длительностью около 0,5 *мксек*. Б. И. Стрелков

9195. Точные методы преобразования цифровых данных в непрерывные на вычерчивателях кривых. **Бейн** (Precision digital-to-analog conversion methods for graphical plotters. Bain Mitchell B.), Proc. Nat. Electronics Conf. Chicago 1955, Chicago 1956, 268—277 (англ.)

Приводится описание нескольких методов преобразования данных из цифровой формы в графическую. Указывается, что обычно в устройствах подобного типа используется метод самобалансирующего потенциометра. Но у этого метода есть недостаток: отклонение напряжения источника, питающего потенциометр, от номинальной величины вносит погрешность в работу вычерчивателя. Автор предлагает метод самобалансирующего моста Уитстона, в котором отклонение напряжения источника питания практически не вносит погрешности. Рассматривается принципиальная схема подобного устройства Плечи потенциометра набираются из декад калиброванных сопротивлений, каждое из сопротивлений может быть зашунтировано контактом соответствующего реле: включение последних происходит в соответствии с поступающей цифровой информацией.

Приводится описание подобных устройств, выполненных в двух вариантах. В одном варианте цифровая информация набирается с помощью четырех декадных переключателей соответственно по осям X и Y. Затем нажимом кнопки она преобразуется в графическую форму. Сопротивления выполнены с точностью $\pm 0{,}05\%$, при этом точность преобразования по всей шкале составляет $\pm 0{,}1\%$. В другом варианте преобразование данных происходит автоматически при непрерывном поступлении цифровой информации. В этом устройстве используются трехдекадные регистры на реле и, кроме этого, введен буферный регистр между дешифратором и регистром, что позволяет одновременно вычерчивать кривую и принимать следующую информацию. Устройство может также работать шаг за шагом от руки. Приведены фото общего вида устройства и отдельных узлов. Б. И. Шитиков

9196. Расчет релаксационных генераторов, работающих на газоразрядных приборах с холодным катодом. **Сыпчук П. П.**, Сб. статей Моск. высш. техн. уч-ща, 1956, 55, 47—57

Приводятся известные расчетные формулы релаксационных генераторов без учета времени деионизации. Эти формулы справедливы для работы на малых частотах. С повышением рабочей частоты величины (период и амплитуда колебаний), рассчитанные по формулам, отличаются от действительных на 50—60%.

Описываются эксперимент и результаты проверки формул, выведенных с учетом времени деионизации. Генератор был собран на неоновой лампе МН-3. Зарядный ток поддерживался постоянным с помощью специального устройства. Время заряда емкости и амплитуда колебаний, подсчитанные по полученным формулам, дают удовлетворительные для практических целей результаты. Ю. К. Черевычник

9197. Кристаллический триод с поверхностным барьером. Ч. I. Принципы работы кристаллического триода с поверхностным барьером. Брэдли (The surface-barrier transistor. Part I. Principles of the surface-barrier transistor. Bradley W. E.), Proc. I. R. E., 1953, 41, № 12, 1702—1706 (англ.)

Первая из пяти статей по кристаллическим триодам с поверхностным барьером (реф. 9198—9201).

Поверхностный металлический контакт, нанесенный на германий электронной проводимости, вызывает появление поверхностного барьера, поле которого препятствует переходу электронов в металл. При наложении на металл положительного потенциала толщина барьера уменьшается, а при отрицательном потенциале—возрастает. Так как концентрация дырок в области барьера вблизи поверхности повышена по сравнению с равновесной концентрацией в объеме, такой контакт обладает способностью при наложении на металл положительного потенциала инъектировать дырки в объем германия. Таким образом прямой ток через барьер складывается из электронной и дырочной компонент. При электролитическом нанесении металла на свежепротравленную поверхность германия инъекционная способность контакта зависит от природы металла. Наиболее подходящими металлами являются индий, цинк, кадмий, олово и медь. Для повышения эффективности поверхностного контакта в качестве эмиттора желательно, чтобы ток через него в основном являлся током дырок. Так как в объеме германия ток в основном является током диффузионным, желательно создание возможно большего градиента концентрации дырок между эмиттором и коллектором за счет уменьшения толщины слоя германия между ними до нескольких микрон. Точный контроль толщины, а также большая однородность барьера достигаются применением метода электрохимического нанесения металлического контакта. Полученные этим способом контакты обладают вольт-амперной характеристикой с показателем в экспоненте, близким при комнатной температуре к значению приложенной разности потенциалов, помноженной на сорок, что и ожидается из теории. В обратном направлении дифференциальное сопротивление коллектора становится высоким при напряжении выше четверти вольта, что позволяет использовать триоды при низких напряжениях. Экспериментальный триод при напряжении смещения в 3 *в* на частоте 30 *Мгц* давал усиление по мощности 18 *дб* и обеспечивал выходную мощность порядка милливат. А. Р.

9198. Кристаллический триод с поверхностным барьером. Ч. II. Электрохимический метод изготовления триодов с поверхностным барьером. Тайли, Вильямс (The surface-barrier transistor. Part II. Electrochemical techniques for fabrication of surface-barrier transistors. Tiley J. W., Williams R. A.), Proc. I. R. E., 1953, 41, № 12, 1706—1908 (англ.)

Разработанный электрохимический метод заключается в том, что после предварительной шлифовки и травления исходных пластинок германия последние подвергаются специальному электролитическому травлению при помощи двух тонких струек электролита, бьющих в противоположные поверхности пластинки. При этом пластинка германия служит анодом, а катод погружается в электролит. Это соединение соответствует протеканию только малого обратного тока через контакты германия с электролитом, который можно достаточно точно контролировать внешним напряжением, концентрацией электролита и уровнем освещенности, играющей важную роль в этом процессе. Разработанная методика позволяет получать расположенные друг против друга углубления с достаточно плоским дном, дающим активную площадь базы, толщиной порядка нескольких микрон, и с разбросом ее от образца к образцу менее микрона.

При изменении полярности напряжения электролитическое травление превращается в электролитическое покрытие протравленной поверхности металлом, соль которого использовалась в качестве электролита. Описанные образцы были изготовлены при применении 0,1 N раствора сульфата индия. В процессе травления ток при диаметре углубления около 0,25 *мм* равен 15 *ма*, тогда как напряжение вследствие высокого сопротивления струй составляет 200—300 *в*. Время травления пластинки толщиной около 0,075 *мм* до конечной толщины активной области базы в 0,005 *мм* составляет 90—120 сек. Оптимальный ток при покрытии меньше чем при травлении, а диаметры электродов делаются

значительно (в 2—5 раз) меньше диаметра углублений.

После нанесения электродов система еще раз травится в смеси плавиковой и азотной кислот для снижения тока утечки, после чего триод заливается полистиреном и монтируется в герметизированный патрон. А. Р.

9199. **Кристаллический триод с поверхностным барьером. Ч. III. Схемные применения триодов с поверхностным барьером. Эйнджелл, Кейпер** (The surface-barrier transistor. Part III. Circuit applications of surface-barrier transistors. Angell J. B., Keiper F. P., Jr), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 12, 1709—1712 (англ.)

Триоды этого типа дают возможность расширить область применения кристаллических триодов с малым потреблением мощности. Исследования проводились при потреблении мощности на триод несколько больше 2 *мвт* и с максимальным потенциалом смещения на коллекторе в 3 *в*. Широкополосный двухкаскадный звуковой усилитель с применением триодов, имеющих граничную частоту 45 *Мгц* и включенных с заземленным эмиттором, давал усиление по мощности 29 *дб* при ширине полосы 3,2 *Мгц*. Использование дросселей повышало ширину полосы до 6,5 *Мгц* без изменения усиления, а введение сверх того катушек для компенсации выходных емкостей триодов повышало ширину полосы до 9 *Мгц*. В триггерных схемах было получено время переключения менее 0,10 *мксек*. Полосовой высокочастотный усилитель на триоде с граничной частотой 50 *Мгц* давал устойчивый коэффициент усиления по мощности 13 *дб* при частоте 30 *Мгц*. Триод включался при этом с заземленной базой. Был также собран генератор на рабочую частоту 70 *Мгц*. А. Р.

9200. **Кристаллический триод с поверхностным барьером. Ч. IV. О высокочастотных характеристиках триодов. Канзас** (The surface-barrier transistor. Part IV. On the high-frequency performance of transistors. Kansas Robert), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 12, 1712—1714 (англ.)

Граничная частота, определяемая как частота, при которой коэффициент усиления по току снижается на 3 *дб* от его низкочастотной величины, подсчитывается исходя из одномерной модели триода. Так как в действительности область базы не имеет строго параллельных граней, то учет изменения толщины базы проводится путем расчета коэффициента усиления системы триодов, соединенных параллельно и полностью идентичных между собой за исключением толщины базы и ее площади. Последующий переход от сумм к интегралам позволяет рассчитать зависимость граничной частоты от плавного изменения формы базовой области. Проверка расчета путем сопоставления экспериментально найденных значений граничной частоты с рассчитанными по измеренным параметрам, определяющим степень влияния толщины активной части области базы, дала удовлетворительное совпадение обеих величин. Так как одновременно при этом было показано, что отклонение от плоскопараллельности базы значительно снижает величину граничной частоты, то этим еще раз была подчеркнута важность достижения более плоских переходов коллектора и эмиттора. А. Р.

9201. **Кристаллический триод с поверхностным барьером. Ч. V. Свойства контактов металла с полупроводником. Шварц, Уолш** (The surface-barrier transistor. Part V. The properties of metal to semiconductor contacts. Schwarz R. F., Walsh J. F.), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 12, 1715—1720 (англ.)

Вольт-амперные характеристики диодов, изготовленных описанным выше электрохимическим методом (реф. 9198), при достаточно малых значениях приложенной разности потенциалов удовлетворяют теоретической формуле идеального выпрямителя. При напряжениях выше 0,05 *в* прямой ток начинает отклоняться от теоретических значений в сторону понижения; обратный ток обычно не дает ясно выраженного насыщения, а величина его несколько выше чем у диодов, изготовленных вплавлением. Общее соответствие между характеристиками диодов с электролитическим и вплавленным контактами дает основание предполагать, что строение слоя пространственного заряда у обоих типов диодов имеет общие черты. Исходя из этого предположения рассчитывается емкость барьера. Экспериментально полученная зависимость емкости от приложенной разности потенциалов хорошо совпадает с рассчитанной зависимостью. Сопоставление экспериментально полученного тока насыщения с рассчитанным теоретически дырочным током через контакт позволяет заключить, что доля дырочной компоненты в прямом токе у разработанных диодов составляет в среднем 10—15%. При этом одновременно показано, что электронная компонента тока эмиттора при образовании второго контакта — коллектора практически не меняется, тогда как дырочная компонента резко возрастает вследствие возрастания градиента концентрации, если толщина базы значительно меньше длины диффузии дырок. Если инъекционное отношение (отношение дырочной компоненты тока к полному току) диода равно 0,1 при длине диффузии дырок, равной 0,06 *см*, то при толщине базы $5{,}8 \cdot 10^{-4}$ *см* инъекционное отношение может быть равным 0,92. Такая малая толщина базы осуществима при электрохимическом процессе, но практически неосуществима путем вплавления вследствие неоднородности проплавления. А. Р.

9202. **Теория удельного сопротивления и коэффициента Холла примесного германия вблизи комнатной температуры. Херкарт, Кершан** (Theoretical resistivity and Hall coefficient of impure germanium near room temperature. Herkart P. G., Kurshan J.), RCA Rev., 1953, **14**, № 3, 427—440 (англ.)

Подробно проанализирована зависимость удельного сопротивления монокристаллических образцов германия от концентрации введенных примесей и температуры в интервале от —100 до +140°. В этом интервале температур подвижность определяется в основном решеточным рассеянием, которое только и учитывается. Результаты представлены в виде семейств кривых зависимости удельного сопротивления от температуры как для образцов электронной, так и дырочной проводимости, где в качестве параметра выбрана величина удельного сопротивления при +25°. В соответствии с последними экспериментальными данными для удельного сопротивления материала при +25° используется величина, равная 60 *ом. см*. Отмечено, что германий с малым количеством акцепторных примесей может иметь удельное сопротивление выше собственного (64 *ом. см*), что связано с различием подвижностей дырок и электронов. Отмечается также, что германий электронной проводимости при данном значении удельного сопротивления чище, чем германий дырочной проводимости.

Приведены графики связи удельного сопротивления германия как электронной, так и дырочной проводимости с концентрацией примесей, выраженной в абсолютном количестве атомов на $см^3$ и в относительной концентрации. Приведены также графики зависимости коэффициента Холла при комнатной температуре от примесной концентрации и удельного сопротивления германия. Даны аналитические выражения и кривая зависимости положения уровня Ферми при комнатной температуре от концентрации примесей. Все данные приведены в форме, удобной для использования при решении задач об определении концентрации примесей по данным электрических измерений и, наоборот, о расчете необходимых концентраций примесей для полу-

чения германия заданного удельного сопротивления.
А. Р.

9203. **Введение в исследование полупроводников.** Лазарев (Introduction à l'étude des semi-conducteurs. Lasareff V.), Rev. univers. mines, 1953, 9, ser. 9, № 12, 789—801 (англ.)

Дан обзор электрических свойств (проводимости) некоторых полупроводников: атомарных (Ge, Si, Se, Tl, α-Sn), соединений (окислы, сульфиды металлов, шпинели и т. д.); синтетических материалов для полупроводниковой электроники (интерметаллические соединения). Рассмотрена зонная теория кристаллов, влияние примесей на электропроводность атомарных полупроводников, механизм проводимости у сложных полупроводников.
А. Р.

9204. **Автоматическая счетная машина «Мадас модель 20 ATG» для статистических работ** (Madas fully automatic calculator. The Madas statistical model 20 ATG), Appl. Statist., 1954, 3, № 3 (англ.)

Сообщение английской фирмы «Muldivo Calculating Machine Co., Ltd.» о выпуске счетной машины «Magac модель 20 ATG», предназначенной для выполнения всех видов статистических работ. Машина имеет 4 счетчика: 2 счетчика результатов (верхний и нижний), емкостью 20 разрядов каждый, и 2 счетчика оборотов (правый и левый), емкостью 10 разрядов каждый. На машине можно одновременно с получением отдельных произведений, множителей или частных производить их накопление. Механизм множителя и механизм установки чисел имеют смотровые окна.

Возведение чисел в квадрат производится за одну рабочую операцию. Имеется возможность переноса чисел из счетчика результатов в механизм множителя (при умножении вида $a \times b \times c$). При установке на 10-разрядной клавиатуре значений x и y легко получать выражение x^2, y^2, $2xy$, Σx, Σy, а также Σx^2, Σy^2 и $\Sigma 2xy$ (последнее для положительного и отрицательного x). Приводится фото машины.

Примечание референта. Вычислительные машины марки «Мадас» выпускаются также швейцарским акционерным обществом Эгли (H. W. Egli).
Н. Н. Парусникова

9205. **Механическая счетная машина для статистических работ «Монро-матик САА-10-3-S»** (The statistical model «Monro-matic CAA-10-3-S), Appl. Statist., 1954, 3, № 1, 65 (англ.)

Сообщение английского отделения американской фирмы «Монро» (Monroe Calculating Machine Co) о выпуске механической счетной машины «Монро-матик САА-10-3-S» (Monro-matic CAA-10-3-S), предназначенной для выполнения статистических и научных вычислений. На машине можно за одну рабочую операцию возводить числа в квадрат, а также передавать числа из счетчика результатов в регистр множителя, производить накопление процентных отношений, множителей и частных и т. п. Машина имеет 21 разрядный счетчик результатов и 2 счетчика оборотов счетной емкостью 10 и 11 разрядов. Наличие последних позволяет одновременно регистрировать положительные и отрицательные частные. Приводится фото машины.

Примечание референта. Машина «Монро-матик САА-10-3-S» создана фирмой на базе машины «Монро САА-10-3» и отличается от последней наличием 2-го 10-разрядного счетчика оборотов. В свою очередь машина «Монро САА-10-3» создана на базе машины «Монро САА-10» (РЖМат, 1954, 5867) и отличается от последней наличием счетчика числа умножений.
Н. Н. Парусникова

9206. **Счетные и пишущие машины «Рейнметалл» облегчают работу** (Rheinmetall-Büromaschinen erleichtern die Arbeit), Bürobedarf-Rundschau, 1955, № 12, 284—285 (нем.)

Сообщение фирмы «Рейнметалл-ринг» (Rheinmetall-Ring) о выпуске пишущих машин моделей Kst, GS, GSE, вычислительных машин с ручным приводом модели DIIc, малых полуавтоматических вычислительных машин моделей KELIIcR, KELIIcRS, KEWIIc, KELIIc и автоматических вычислительных машин модели SARIIc с обратным переносом числа из счетчика на клавиатуру, суммирующих машин моделей AHS, AES и AES We/33, фактурных и бухгалтерских машин.
Н. П. Вашкевич

9207. **Счетное устройство для отделов кадров** (A handy computor for personnel work), Personnel Manag. Welfare and Industr. Equipm., 1955, 22, № 185, 216 (англ.)

Дано описание ручного счетного устройства, предназначенного для подсчетов календарного времени рабочих и служащих крупных учреждений. Устройство представляет собой систему дисков, смонтированных на общем валу и снабженных круговыми шкалами. Деления шкал соответствуют числу дней и недель в году (365 и 52).
С. Л. Хубларова

9208. **Опыт присоединения двухпериодного перфоратора ПД 45-1 к табулятору Т-4М для итоговой перфорации.** Дацкевич М. Ф. В сб.: Механизация учета и вычислительных работ. М., Машгиз, 1955, 41—58

Описывается частичная реконструкция, произведенная работниками Госбанка, перфоратора ПД 45-1 и табулятора Т-4М для обеспечения автоматической перфорации результатов подсчета со счетчиков табулятора.

Для обеспечения итоговой перфорации в конструкцию указанных машин введен целый ряд дополнительных устройств. Сюда входит контакт 45 колонки для автоматического пуска перфоратора и линейный коммутатор, предназначенный для коммутации соответствующих разрядов счетчиков табулятора с колонками карты, 11 новых реле и 3 реле как дополнительные к имеющимся, дополнительные контактные группы к 6 имеющимся реле, два выключателя у табулятора и один у перфоратора, промежуточная монтажная панель, предназначенная для присоединения итогового перфоратора к табулятору. Кроме того, реле перфоратора РПВ заменено обычным реле табуляторного типа, а кулачковые контакты Г8 и Г16 работают в новых цепях и по новой диаграмме. Среди введенных новых реле имеется два реле РИН (реле исключения нулей) и РВН (реле восстановления нулей), которые позволяют путем соответствующей коммутации либо исключить пробивку нулей, особенно подряд, либо обеспечить обычное действие наборного устройства перфоратора. Реконструированный перфоратор в отличие от других итоговых перфораторов позволяет получать постоянные признаки путем предварительного их набора и закрепления.

В статье представлены принципиальные электросхемы модернизированного табулятора и перфоратора, схема панели табулятора и промежуточная монтажная панель. Излагается подробное описание электрических цепей, обеспечивающих автоматическое взаимодействие перфоратора и табулятора.

Такую реконструкцию машин целесообразно, конечно, осуществлять лишь при отсутствии комплекта специализированных машин Т-4МИ с ИП-45 или Т5 с ИП-80.
Н. П. Вашкевич

9209. **Численное решение краевых задач уравнения потенциала с помощью перфокарт.** Шварц (Numerische Lösung des Randwertproblems der Potentialgleichung mit Hilfe von Lochkarten. Schwarz Eleonore), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 6, 237—240 (нем.)

Развивается способ Кормеса (Kormes M., Rev. Scient. Instrum., 1943, **14**, № 8, 248—250) решения краевых задач уравнения Лапласа с помощью счетно-аналитических машин.

В основу берется известный метод сеток с постоянным шагом h. В отличие от способа Кормеса, использующего для решения четырехчленную формулу, автор предлагает использовать известную восьмичленную формулу

$$u_{ik} = 0{,}20\,(u_{i-1,k} + u_{i+1,k} + u_{i,k-1} + u_{i,k+1}) + \\ + 0{,}05\,(u_{i-1,k-1} + u_{i-1,\,k+1} + u_{i+1,\,k-1} + u_{i+1,\,k+1}).$$

Применение этой формулы повышает точность расчета и, по мнению автора, упрощает автоматизацию процесса вычисления. Это достигается тем, что предлагаемый способ позволяет автоматически изготовлять рабочие карты непосредственно от управляющих.

В заключение приводится подробный пример подготовки рабочих и управляющих карт и последовательность хода расчета для практической задачи, заимствованной из книги Вейганда (РЖМат, 1955, 445 К).

Г. К. Раков

9210. Определение нагрузки трансформаторов с помощью вычислительных машин. Стратton, Джорден, Галлахер (Computers gauge transformer load. Stratton H. E., Joerden R. H., Gallaher B. M.), Electr. World, 1955, **143**, № 12, 128—130, 216—217 (англ.)

Сообщается, что фирмами «Техас Электрик Сервис» и «Арканзас Пауэр энд Лейт» для определения суммарной нагрузки трансформаторов в распределительных сетях используются перфокартные машины, в том числе ИБМ-604. Примененная методика нахождения суммарной нагрузки дает возможность с достаточной степенью точности определять нагрузку на некоторый срок вперед, что особенно важно для дней с пиковой нагрузкой. В качестве исходных данных используются статистические материалы по большому количеству потребителей электросистемы.

Проведенные сравнительные испытания показали, что 5% рассчитанных нагрузок в точности совпали с измеренными, 60% давали отклонение не более чем на 10%..

А. А. Крюков

9211. Ускоренный анализ сложных геофизических расчетов с помощью электронных вычислительных машин. Хип (Electronic calculators speed up analysis of complex geophysical computations. Heap W. O.), Oil and Gas. J., 1955, **53**, № 48, 184—186, 189 (англ.)

Большинство геофизических исследований связано с большим объемом вычислительных работ и требует быстрого выполнения этих вычислений. Поэтому обычно прибегают к значительным математическим упрощениям при решении таких задач. Применение электронных вычислительных машин позволяет устранить эти трудности. Описывается пример использования электронных вычислительных перфораторов для автоматической обработки весовых данных и определения вертикальной осадки пород с использованием весовых карт с прямоугольной и треугольной координатными сетками. Излагается методика использования электронных вычислительных перфораторов для интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих распространение сейсмических колебаний. Указывается на широкие возможности использования электронных вычислительных перфораторов для решения почти всех геофизических задач.

Б. И. Стрелков

9212. Библиографические поиски при помощи машины с перфокартами. Браун, Онил (Library searches with punched-card machines. Brown William Fuller, Jr, Oneal Glen, Jr), Science, 1956, **123**, № 2300, 722—723 (англ.)

Сообщается о работе, выполненной в физической лаборатории фирмы «Сан Ойл» (Sun Oil Co.), по использованию перфокарт и сортировочной машины для механизации библиографических поисков. На перфокарте пробивается порядковый номер статьи, автор, индекс журнала и от 10 до 15 индексных слов, характеризующих содержание статьи. Способ кодирования— суперпозиционный, т. е. коды отдельных индексов не имеют строго определенного места на перфокарте, а занимают всю ее поверхность. При этом, естественно, могут возникнуть ложные комбинации, поэтому материал, отобранный сортировальной машиной, будет содержать и не относящиеся к вопросу документы и нуждается в дополнительной ручной проверке.

Процесс приготовления перфокарты состоит из следующих этапов:

1. Специалист, просматривая статью и пользуясь указателем индексных слов, выбирает индексы, характеризующие данную статью, и на карточке выписывает их порядковые номера.

2. По порядковым номерам индексов машинным путем выбираются карты, содержащие четырехпозиционные коды этих индексов.

3. Коды последовательно пробиваются на карте, которая будет соответствовать данному документу.

Примененная лабораторией сортировальная машина требует многократного прогона массива перфокарт при отыскивании материала, характеризующегося многими признаками. Описывается приготовление случайного кода (Random coding) для карт фирмы ИБМ.

Авторы утверждают, что применение специальных методов кодирования (Random coding) сокращает число ложных документов до приемлемой на практике величины.

Г. Г. Стецюра

9213 К. Моделирующие устройства. Ремон (Le calcul analogique. Principes et contribution à une théorie générale. Raymond F. H.) (Consiglia Naz. Ricerche. Pubbl. Inst. Appl. Calcolo, № 391). Torino, Casa Ed. Libr. Rosenberg & Sellier, 1954, 134 p., 2000 L.) (франц.)

Отчет о лекции, прочитанной автором в Национальном институте прикладного анализа в Риме (1952). Гл. 1 посвящена основным принципам действия моделирующих устройств; описываются элементарные математические операции, приводятся примеры простых моделирующих устройств. В гл. 2 рассматриваются алгебраические и линейные дифференциальные уравнения. Общее описание моделирующих устройств дается в гл. 3. В последней гл. 4 обсуждаются вопросы точности и устойчивости моделирующих устройств. Рассматриваются различные виды электронных моделирующих устройств. Брошюра снабжена фотографиями и схемами американских и европейских устройств.

H. Bückner

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 526.

9214 К. Методы вычисления на моделирующих устройствах. Сорока (Analog methods in computation and simulation. Soroka Walter W. New York — Toronto — London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1954, xii, 390 pp., 7.50 doll.) (англ.)

В книге описаны как специальные, так и универсальные моделирующие устройства и различные возможности их развития, особенно механических и электромеханических устройств.

В гл. 1 рассматриваются механические счетные элементы. Автор разбирает элементы для сложения и вычитания, масштабные множители, вопросы точности, механические интеграторы. Описывается использование интеграторов для умножения и генерирования специальных функций. Упоминаются и другие методы

умножения. Также разбираются методы извлечения корня, деления, дефференцирования и применения сервомеханизмов для обращения функций. Те же вопросы, но для электрических и электронных счетных элементов, разбираются в гл. 2. Рассматриваются усилители с большим коэффициентом усиления с отрицательной обратной связью как компоненты электронных интеграторов и устройств для получения производных, а также потенциометрические и сельсинные устройства для генерирования синусоидальных функций. Машины для решения систем алгебраических уравнений рассматриваются в гл. 3. Описываются как механические, так и электрические устройства (первые, главным образом, для решения линейных уравнений). Дискуссия по устройствам для решения векового уравнения связывает эту главу со следующей, где рассматриваются нелинейные уравнения вообще; отмечается способ вычисления нулей полиномов, описываются гармонические синтезаторы, применение электромагнитных полей и моделирующих устройств на пассивных элементах (последних к непрерывным дробям). Гл. 5 и 6 посвящены дифференциальным анализаторам вообще; обсуждаются как механические, так и электронные устройства, в частности их компоненты и типичные применения. Динамические модели — тема гл. 7. Подчеркивается аналогия между механическими и электрическими элементами. Далее описаны прерывающие системы. В гл. 8 описываются схемы для получения конечных разностей обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных. Указывается широкое поле применений этих схем, например для решения уравнения Лапласа и задач упругости. Последняя гл. 9 посвящена мембранам и моделям из проводящих листов.

В книге разбираются как чисто теоретические вопросы, так и вопросы практического характера. Она будет полезна конструкторам моделирующих устройств и научным работникам, которые должны их использовать. Книга может быть также рекомендована и для студентов (с некоторыми сокращениями). H. Bückner

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 526.

9215 К. Конструкция и ремонт вычислительных машин. Модели САР и ВК-2. С а в о с т ь я н о в Д. Д. М., Госстатиздат, 1955, 199 стр., илл., 9 р. 55 к.

Книга содержит описание механических вычислительных машин САР и ВК-2. В описание входят: общая характеристика, подготовка к эксплуатации, порядок выполнения на машинах арифметических операций, проверка машин на счет, устройство и работа механизмов машин и их взаимодействие при выполнении отдельных операций, техническое обслуживание и ремонт машин (разборка, сборка, регулировка и проверка).

Книга в основном предназначена для механиков, специализирующихся в области ремонта вычислительных машин. Она может быть также частично использована студентами техникумов и втузов при курсовом и дипломном проектировании.

Ссылки на работы других авторов отсутствуют. Аналогичный материал по машине ВК-2, но без описания ее ремонта, излагается в сборнике «Малые вычислительные машины» под редакцией Д. Ю. Панова (Изд. АН СССР, 1952 г.). Н. П. Вашкевич

9216 П. Электронный сумматор-аккумулятор. С т о у н (Electronic adder-accumulator. S t o n e J o s e p h J., J r) [United States of America as represented by the United States Atomic Energy Commission]. Пат. США 2705108, кл. 235—61, 29.03.55

Предлагается схема параллельного сумматора для сложения десятичных чисел, представленных двоичным кодом с избытком 3.

К началу сложения одно из слагаемых хранится в триггерном регистре, входящем в устройство, другое выдается в виде постоянных уровней напряжения. Диодные сетки в статике отрабатывают сумму этих двух слагаемых и поправок для каждого десятичного разряда (если из данного десятичного разряда нет переноса в старший, то в него должна быть введена поправка —3 или, что то же самое, +13; если из данного десятичного разряда есть перенос в старший, то поправка равна +3; в обоих случаях введение поправок в данный десятичный разряд не должно вызывать переноса в следующий разряд). По истечении времени, необходимого для срабатывания диодных сеток, устройство управления выдает импульс, который одновременно по всем разрядам производит замену цифр 1-го слагаемого, хранившегося в регистре, цифрами суммы, тоже представленной двоичным кодом с избытком 3.

Каждый двоичный разряд схемы представляет собой фактически сумматор на 5 входов и с 3 выходами (выход правой цифры суммы, выход цифры переноса, образующегося при двоичном сложении заданных чисел, и выход дополнительного переноса, образующегося от добавления поправки). 5 входов сумматора предназначены для цифр слагаемых, цифры основного переноса из предыдущего разряда, поправки и цифры дополнительного переноса из предыдущего разряда. Входы поправок во всех двоичных разрядах тетрады, соответствующей одному десятичному разряду, управляются выходом основного переноса из ее старшего разряда. Выход дополнительного переноса из старшего двоичного разряда тетрады и вход дополнительного переноса в младший двоичный разряд тетрады не используются.

Всего в каждом двоичном разряде схемы имеется 32 диода, 8 инвертеров, выполненных на двойных триодах, 1 триггер, также построенный на двойном триоде, и 2 пентодных вентиля. М. А. Карцев

9217 П. Электронный перемножатель. У и н т е р (Electronic computer. W i n t e r D a v i d F e r d i n a n d) [Aller B. Du Mont Labs., Inc.]. Пат. США 2702158, кл. 235—61, 15.02.55

Устройство представляет собой перемножатель на электроннолучевой трубке для получения произведения 3 непрерывно меняющихся напряжений $X(t)\cdot Y(t)\cdot Z(t)= = R(t)$. Перемножатель в основе имеет электроннолучевую трубку с электростатической отклоняющей системой. Перед экраном помещена не пропускающая света крестообразная маска, разбивающая экран вертикальной и горизонтальной полосами на 4 квадранта. Специальный генератор подает напряжение развертки на одну горизонтально- и одну вертикально-отклоняющие пластины. На вторую вертикально-отклоняющую пластину подается одно из перемножаемых напряжений $Y(t)$, смещающее получающийся от развертки растр по вертикали. Подаваемое на вторую горизонтально-отклоняющую пластину перемножаемое напряжение $X(t)$ смещает растр в горизонтальном направлении. Третье перемножаемое напряжение $Z(t)$ подается на катод электроннолучевой трубки, меняя тем самым интенсивность электронного потока, а следовательно, и освещенность экрана. Перед экраном расположены два фотоэлемента, каждый из которых считывает сигнал с пары накрест лежащих квадрантов, что дает возможность получать произведение с учетом знака. Сигналы с фотоэлементов подаются на вертикально-отклоняющие пластины второй электроннолучевой трубки. Эта электроннолучевая трубка снабжена генератором горизонтальной развертки, благодаря чему на экране вырисовывается в определенном масштабе времени кривая, соответствующая произведению трех напряжений, причем выше оси будут находиться положительные значения, а ниже — отрицательные.

В. Д. Князев

9218 П. Двоичный шифратор. Барни (Binary quantize. Barney Kay Howard). Пат. США 2715678, кл. 250—27, 16.08.55

Предлагается электронное устройство для преобразования непрерывных величин, представленных в виде напряжения, в цифровую форму в виде двоичных чисел, пропорциональных мгновенным значениям измеряемого напряжения.

Устройство состоит из трех основных частей: из реверсивного двоичного счетчика, схемы, преобразующей информацию, находящуюся в этом счетчике, в напряжение, и схемы сравнения или датчика рассогласования, замыкающего цепь обратной связи.

Благодаря такой конструкции устройство обладает очень ценными свойствами, позволяющими ему выполнять разнообразные функции при совместном использовании цифровой и моделирующей вычислительной техники. Точность преобразования с помощью описываемого устройства определяется разрешающей способностью устройства сравнения, точностью цепи обратной связи, а также количеством каскадов реверсивного счетчика. Указывается, что при точности моделирующего вычислительного устройства порядка 1—2% достаточно будет использовать пятиразрядный двоичный счетчик. Приводятся блок-схема применения устройства для умножения непрерывных величин, блок-схемы двоичных счетчиков прямого и обратного счета, блок-схема всего двоичного шифратора, принципиальная электрическая схема двоичного шифратора, а также формы колебаний, иллюстрирующие работу двоичного шифратора. Даются также принципиальная электрическая схема дифференцирующего устройства на базе описываемого двоичного шифратора и осциллограммы, иллюстрирующие его работу.

Описываемый двоичный шифратор состоит из 17 электронных ламп, не считая ламп, необходимых для построения реверсивного двоичного счетчика, который может быть не обязательно электронным.

Б. И. Стрелков

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

9219. Перфоленты и магнитные ленты управляют станком для фрезеровки лонжеронов и обшивки самолета (Punched tapes and magnetic tapes programme and control spar and skin mille.), Mach. Shop Mag., 1955, **16**, № 8, 463—468 (англ.)

Массачусетский технологический институт (Massachusetts Institute of Technology) совместно с фирмой «Дженерал Электрик» (General Electric Co.) разработал по заказу фирмы «Гиддингс энд и Льюис Машин Тул» (Giddings and Lewis Machine Tool Co.) систему управления станками, использующую многоканальную магнитную ленту и перфоленту. Система, названная «Нумерикорд» (Numericord), разрабатывалась около трех лет и теперь успешно применяется для управления станком, фрезерующим из целого куска металла обшивку реактивного самолета вместе с силовым набором. При этом обеспечиваются допуски $\pm 0{,}025$—$0{,}05$ *мм*. Станок, которым управляет система, имеет стол, размером $4{,}2 \times 1{,}8$ *м*, способный подниматься на 1,2 *м*. Скорость шпинделя 3600 об/мин. Производительность станка равна 7380 $см^3$ в 1 мин. Система управляет режущим инструментом, перемещающимся по 5 пространственным осям, и выполняет 22 вспомогательных операции, такие, например, как пуск и остановка станка, удаление стружки, смазка, перемещение детали от одного станка к другому, подача сигнала при необходимости заменить инструмент, остановка станка для проверки и т. д. В систему входят 4 отдельных блока. Исходные данные (подача по желаемым осям и специальные команды) набиваются в десятичной форме на перфоленте и затем поступают в электронную вычислительную машину, где преобразуются в непрерывные сигналы управления, записываемые на 14 различных каналах магнитной ленты. Вычислительная машина имеет буферное запоминающее устройство на магнитных сердечниках, в которые вводятся группами начальные данные и выбираются постепенно для приготовления магнитной ленты. Это обеспечивает непрерывность управляющих сигналов на магнитной ленте и непрерывность работы станка. На пульте вычислительной машины имеются контрольные приборы (5 грубых и 1 точный, подключающийся по желанию вместо любого из грубых), которые алгебраически суммируют перемещения режущего инструмента. Это позволяет оператору визуально следить за положением инструмента. Параллельные каналы магнитной ленты дают возможность одновременно управлять движениями станка по всем пяти осям и в то же время осуществлять различные вспомогательные операции. Сигналы с готовой многоканальной магнитной ленты непрерывно считываются другим блоком и питают сервосистему, непосредственно управляющую движениями станка. Для управления движением по каждой из 5 осей используется отдельный замкнутый контур регулирования. Осевое перемещение на 2,5 *мм* осуществляется за один оборот ротора сигнального сельсина. Кроме обычной работы от перфоленты, система «Нумерикорд» может использоваться для приготовления управляющих магнитных лент при работе станка по шаблону или на холостом ходу.

Применение системы «Нумерикорд» для управления фрезерным станком, изготавливающим горизонтальный стабилизатор реактивного самолета F-100 D «Супер Сейбр» фирмы «Норт Американ», уменьшило станочное время более чем на 50%. Система может применяться также для управления станками других типов.

А. И. Щуров, П. Ш. Янкелевич

9220. Управление станком с помощью магнитной ленты. Мак-Феррен (Control tape prepared from numerical data. McFerren Edgar L.), Machinery, 1955, **61**, № 12, 178—182 (англ.)

См. реф. 9219.

9221. Вычислительные машины и автоматизация. Астин (Computing machines and automation. Astin A. V.), Computers and Automat., 1956, 5, № 4, 6—11, 38 (англ.)

Статья содержит материалы из отчета директора Национального бюро стандартов США (НБС) д-ра Астина о работах, проводимых в НБС, по нематематическому применению цифровых вычислительных машин. Отмечая, что автоматизация является высшей формой механизации, автор указывает, что до сих пор автоматизация затрагивала только процесс производства и лишь применение вычислительных машин позволило начать автоматизацию совершенно новых областей, таких как работа банков, страховых компаний, административных учреждений и т. п. Приводится ряд примеров таких новых применений машин, выполненных НБС совместно с другими организациями. Так, для Бюро переписи (Bureau of the Census) был сконструирован ФОСДИК—фотоэлектрическое считывающее устройство для быстрого ввода данных переписи, напечатанных обычным текстом (микрофильм), в машину. Автор отмечает, что для машин по обработке данных, производящих сравнительно небольшие вычисления, но обрабатывающих массу данных от многих источников, особенно важно иметь эффективные входные и выходные устройства. Совместно с Бюро патентов (Patent Office) решается задача механизации поиска и подборки патентов. Для изучения этого вопроса был организован специальный ко-

митет под председательством Буша, который установил возможность средствами современной вычислительной техники решить эту задачу. В НБС на машинах СЕАК, ИБМ-701 и 702 решались задачи, связанные со снабжением армии и морской авиации.

Одним из направлений работы НБС является разработка управляющих устройств для автоматической сборки радиоаппаратуры. В статье указан еще ряд работ по приложению вычислительной техники, выполняемых в НБС. Г. Г. Стецюра

9222. Револьверный штамп и положение листа на нем управляются при помощи перфокарт. Келлинг (Turret punch, and sheet location controlled by punched cards. Kelling Leroy U. C.), Metalwork. Product., 1955, 99, № 43, 1822—1826 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о разработке цифрового устройства для управления положением головки револьверного штампа и положением листа на нем. Для перемещения листа по координатам X и Y и вращения револьверной головки на станке имеются 3 мотора постоянного тока, которые питаются и управляются от электронной счетной схемы.

Информация о положении листа (координаты отверстия) и револьверной головки пробивается на перфокарте и вводится в блок «указатель положения». В этом блоке информация расшифровывается, в соответствии с этим производится управление мотором, изменяющим координаты. Информация о координате содержит 4 десятичных цифры — целые, десятые, сотые и тысячные доли дюйма. 4 сигнала, соответствующие информации, поступают на 4 сельсина датчика, вращающиеся с различной скоростью. Первый из них делает один, второй — 10, третий — 100, четвертый — 1000 оборотов на дюйм перемещения стола. Сигналы с этих сельсинов подаются на сельсины-трансформаторы, роторы которых связаны с выходным валом мотора и которые вместе с усилителями образуют следящую систему. Для каждой отдельной операции используется одна перфокарта, если же нужно пробить ряд отверстий, то используется ряд перфокарт.

Эта система по крайней мере в три раза увеличивает производительность оборудования и исключает ошибки, возникающие при ручной работе. В. Д. Князев

9223. Роль новой техники в авиации (New techniques buttress avionics' role), Aviat. Week, 1954, 60, № 11, 111—112, 114—115 (англ.)

Отмечается, что в последние годы в военной авиационной технике появилось три основных направления — разработка управляющих систем для воздушной обороны, решения тактических задач и управления полетом, разработка малогабаритных конструкций, использующих новую технику, для уменьшения веса и размеров авиационного оборудования и производство авиационного оборудования на автоматических заводах.

Управляющие системы будут использовать радиолокаторы или другие источники информации (наземные или воздушные), цепи связи для подачи информации в наземные или воздушные управляющие центры, цифровые вычислительные машины для анализа поступающих данных, устройства для обзора тактической ситуации и звенья для автоматической передачи на самолеты информации по управлению полетом и сбрасыванием бомб.

Наиболее сложная из таких систем для континентальной воздушной обороны разрабатывается под руководством Кэмбриджского исследовательского центра военно-воздушных сил и Линкольновской лаборатории Массачусетского технологического института. В качестве предшественника таких систем отмечается система для управления полетом Волскан (Volscan), разработанная в Кэмбриджском исследовательском центре (РЖМат, 1955, 2972—2976).

При разработке таких систем возрастает роль цифровых вычислительных машин, работающих с реальным объектом, из которых отмечаются машины ИРА-1103 фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) и две машины фирмы «Джекобс» (Jacobs Instr.).

Одной из важных частей разрабатываемых систем являются цепи связи. Связь голосом, использующая амплитудную модуляцию требует большей полосы частот, чем импульсно-кодовая модуляция, которая уменьшает полосу канала передачи с 3000 до 100 *гц*.

Другими преимуществами импульсно-кодовой модуляции для связи являются возможность работы при меньшем отношении сигнала к шуму, а также трудность расшифровки.

Несколько систем передачи информации при помощи импульсно-кодовой модуляции, разрабатываются или испытываются в настоящее время в Кэмбриджском исследовательском центре военно-воздушных сил (AFCRC) и в Римском центре авиационных разработок (RADC).

Некоторые из систем предполагают передачу слов импульсным кодом и затем автоматический перевод с печатью текста. Сообщается, что авиационная печатающая машина весом менее 20 *кг* разрабатывается в Авиационном исследовательском центре «Райт» (Wright).

Ведутся работы по другим видам цифровой связи. Так, фирмой «Мелпар» (Melpar) разработан синтезатор речи, который образует различимую речь из импульсного кода полосой 75 *гц*. Л. М. Шехтман

9224. Моделирование перегонки нефти при помощи цифровой вычислительной машины. Дёйч, Хикс (Simulation of a refinery by a digital computer. Deutsch M. L., Hicks J. S.), World Petrol., 1955, 26, № 8, 69—71 (англ.)

Современная нефтеперегонная промышленность часто сталкивается с задачей производства различных нефтепродуктов из большого числа видов нефти. Обычно встают вопросы: как вести перегонку, чтобы получить максимум нефтепродуктов, дающих наибольшую выгоду, или, если известны исходные материалы, условия работы, качество продукции и т. д., то сколько каждого продукта будет получено?

Для изучения подобных вопросов фирма «Сокони Мобил» (Socony Mobil Oil Co.) приобрела у фирмы «Электродэйта» (Electrodata) для своих исследовательских лабораторий универсальную цифровую электронную вычислительную машину «Мобилак» (Mobilac) с запоминающим устройством на магнитном барабане емкостью 4080 десятизначных чисел.

Для составления программы предварительно математически были описаны такие процессы, как каталитический крекинг, алкилирование и др. Программы для отдельных процессов объединялись в единую программу. Программа, моделирующая нефтеперегонку, включает в себя около 6000 команд и чисел. Поскольку объем программы превышает емкость запоминающего устройства, то она вводится и вычисляется по участкам. Для решения одной задачи требуется около 9 мин. времени, причем около 6 мин. идет на ввод программы. В. Д. Князев

9225. Задачи управления решаются вычислительной машиной. Шнейдер, Райт (Operationg problems yield to electronic brain. Schneider J. C., Wright R. G.), Oil and Gas J., 1956, 54, № 50, 168—170 (англ.)

Сообщается, что фирма «Шелл Ойл» (Shell Oil Co.) установила вычислительную машину с программированием на перфокартах для решения различных производственных задач на газовых и нефтеперерабатывающих заводах. На машине будут решаться простые задачи, которые могут быть решены и ручными средст-

вами, однако решение их с использованием машины дает существенную экономию времени. Пример такой задачи: подсчет падения давления для труб различных размеров и длины и разных объемов газа. Значительно более сложной является, например, задача расчета производственных процессов нефтеперерабатывающих заводов: расчет заводских процессов при изменении состава газа, объема, температуры и т. д., расчет строящихся заводов, контроль работы существующих.

Приводится описание применения вычислительной машины для расчета отдельных этапов производственного цикла нефтеперегонного завода. Отмечатеся, что применение вычислительной машины позволит использовать новые вычислительные методы.

Г. Г. Стецюра

9226. **Машинное определение расценок. Хатч** (Machine cost accounting. Hatch Ralph W.), Mining Congr. J., 1955, 41, № 11, 43—45 (англ.)

Сообщается, что фирма «Питтсбург Консолидейтид Коэл» (Pittsburgh Consolidation Coal Co.) использует перфокартное оборудование фирмы «ИМБ» для бухгалтерских расчетов. Это приводит к уменьшению канцелярских расходов, позволяет получить с наименьшими затратами более полную информацию обо всех фазах работы и уменьшить загрузку служащих бухгалтерий. Указывается, что эффективность такого использования машин увеличивается с увеличением объема работ. Важным результатом применения машин для бухгалтерских расчетов является возможность быстрой обработки большого объема документации.

Описывается методика такого использования машин типа ИБМ, заключающаяся в том, что предварительно перфоратор подготавливает специальные перфокарты с указанием номера рудника и имени рабочего. Карты затем заполняются вручную руководителем работ. Затем, в соответствии с этими данными карты перфорируются и обрабатываются с помощью комплекта машин ИБМ. Приводятся примеры таких перфокарт и описание их использования.

Б. И. Стрелков

9227. **Лучшее планирование работы при помощи вычислительной машины для расчетов технологических режимов** (Better job planning with machinability computer), Tooling and Prod., 1955, 21, № 4, 65 (англ.)

Фирма «Дженерал Электрик» выпустила вычислительную машину «Жильбатрон» (Gilbatron) для определения технологических режимов обработки металлов резанием. В вычислительную машину вводится 13 переменных, характеризующих свойства обрабатываемого материала (состав, микроструктура, твердость, состояние поверхности), режущего инструмента (материал, тип и профиль инструмента) и условий резания (срок службы инструмента, тип эмульсии, скорость подачи, глубина резания, диаметр обрабатываемого изделия). В результате вычисления можно узнать скорость резания, вероятный срок службы инструмента, требуемую мощность и т. д., можно также рассчитать оптимальную комбинацию входных данных или эффект изменения одной из величин.

Вычислительная машина переносная и стоит 500 долларов.

В. Д. Князев

9228 П. **Электрическая счетная и вычислительная система для подсчета количества пиломатериала различной длины. Уорк** (Electrical counting and computing system for lengths of material. Work Thomas A.). Пат. США 2691486, кл. 235—98, 12.10.54

Система для регистрации количества пиломатериалов разной длины, состоящая из непрерывно движущегося конвейера с поперечно расположенными пиломатериалами и ряда счетчиков с электрическими контактными датчиками, установленными поперечно движению конвейера.

Л. М. Шехтман

См. также: 8743, 8776, 8790, 8691, 8855, 8866, 8884, 9209

НОВЫЕ КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ

Элементарная дифференциальная геометрия. Хак (Elementare Differentialgeometrie. Haack Wolfgang Basel-Stuttgart, Birkhäuser Verl., 1955, 239 S., ill.. 22 DM) (нем.)

Численное решение систем линейных уравнений. Куффиньяль (Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. Couffignal Louis. (Collect. manuels calculs techn., 2) Paris, Gauthier-villars, 1956, 180 p., ill.) (франц.)

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абрамян Б. Л. 8877
Абэ 9150 К
Агабабян Е. Х. 8872
Азбелев Н. В. 9110
Арешев М. С. 8816
Аржаных И. С. 8862
Ахмедов К. Т. 8887

Б

Бајрактаревић М. 8903
Бари Н. К. 8709
Бахмутская Э. Я. 8510
Бахтин И. А. 8859
Берман Г. Н. 9019 К
Бикматова Г. Г. 9058 Д
Болгарский Б. В. 8495 Д
Болтянский В. Г. 8687
Бондарь В. П. 8914
Брадис Б. М. 8574 К
Бредихина Е. А. 8725 Д
Буланин В. И. 8774
Буткевич А. В. 9133
Бычков Б. П. 8511

В

Вальц Г. Б. 9026
Венков Б. А. 8489
Витушкин А. 8673
Вишик М. И. 8824
Волосов В. М. 8860
Воробьев Л. М. 9109
Воробьев Н. Н. 8628
Вороновская Е. В. 8716
Врэнчану Г. 9066

Г

Гагуа М. 9102
Гайдук Ю. М. 8508
Гейдельман Р. М. 9054
Глаголева П. Н. 9049
Глушков В. М. 8623
Гогоберидзе Д. Б. 9140
Гойдо Ш. М. 8895
Горбунов А. Д. 8795
Гребенюк Д. Г. 9112, 9126, 9127
Гуров В. В. 9176

Д

Дацкевич М. Ф. 9208
Джалилов К. Н. 9103
Джрбашян М. М. 8730
Дородницын А. А. 9104
Драхлин Е. Х. 8572
Дундученко Л. Е. 8740

Е

Евграфов М. А. 8731
Егоров И. Т. 8864
Егорова И. А. 8722
Ельцов А. И. 8699
Ермолаев Л. С. 9175
Еругин Н. П. 8804

Ж

Жак И. Е. 8713
Жидков Г. В. 8717

З

Загорский Т. Я. 8845
Задирака К. В. 8791
Захарчук Е. Ю. 8901
Зморович В. А. 8749

И

Ибрагимов И. И. 8721
Ивата 8494 К
Ильин В. А. 8850
Ито 8944

Й

Йосида 9149 К

К

Кабулов В. К. 8889
Кадиров Н. Б. 9022
Камалов М. К. 8983
Каменомостская С. Л. 8821
Кангро Г. 8916, 8917
Канторович 8958
Карапиколов Хр. 9123
Карапетян К. И. 8858 Д
Кармазина Л. Н. 9151 К
Кароль И. Л. 8847
Карпелевич Ф. И. 8686
Карпов А. П. 8879
Кауфман Б. Л. 8920
Келдыш Л. В. 8675, 8707
Кельберт С. Л. 8490
Кимура 8905 К, 8906 К
Кириллов В. В. 9140
Киселев А. А. 8855
Кито 9148 К
Кобаяси 9013 К
Кованько А. С. 8524
Коган Б. Я. 9176, 9183
Козлов В. Я. 8708
Козлова З. И. 8705
Козырев И. И. 8747
Колчин Н. И. 9009
Кольман Э. 8504
Королюк В. С. 9099
Костюченко А. Г. 8815
Красовский Н. Н. 8794
Красносельский М. А. 8778, 8859
Крейн С. Г. 8778, 8833
Крейнин Я. Л. 8706
Крылов В. И. 9116
Куваев М. Р. 8742
Кузнецов А. В. 8530
Купцов Н. П. 8715, 8723
Курепа Ђ. 8515
Куросу 8584 К
Курцвейль Я. 8790
Кутузов Б. В. 9015 К
Куфарев П. П. 8742

Л

Лаврук Б. Р. 8856 Д
Ландау Л. Д. 9100
Лебедев Н. А. 8739
Лейбин А. С. 9032 К
Лелек А. 8672
Леонтович Е. А. 8786
Линник Ю. В. 9000
Лунц Г. Л. 8913
Лященко Н. Я. 8800

М

Марић В. 8782
Маркова В. А. 8885
Маркус А. С. 8939
Маслов П. П. 8986 К
Мейман Н. Н. 9100
Меньшов Д. 8711
Микеладзе Ш. Е. 9122
Минь Сы-хао 8568
Мирзаджанзаде А. Х. 9103
Михайлов Л. Г. 8748
Михлин С. Г. 8823, 8945
Миядзаки 8987 К
Морозов П. К. 9033 К
Мостовский А. В. 8644
Мысовских И. П. 8883

Н

Назаров О. О. 8863
Найшуль А. Б. 8793
Накаяма 8667 К
Натансон И. П. 8897
Немыцкий В. В. 8805
Никольский С. М. 8720
Новиков П. С. 8707
Нодзава 8924

О

Обморшев А. Н. 8769
Онищик А. Л. 8686
Осима 8630 К

П

Пејовић Т. 8781
Пинскер А. Г. 8947
Плоткин Б. И. 8614, 8631 Д
Погорелов А. В. 8488
Положий Г. Н. 8744, 8745
Попов Б. 8763
Попов Е. П. 8788
Постников А. Г. 8576 Д
Пугачев Б. П. 9113

Р

Разумихин Б. С. 8802
Раскин Н. М. 8491
Рашевский П. К. 8649
Рыбаков В. Н. 9051

С

Савостьянов Д. Д. 9215 К
Салехов Г. С. 8880, 8921 К
Салтыков Н. 8497
Светлицкий В. А. 8793
Симовић М. 8523
Слободенюк Н. П. 8970
Слободской М. И. 8561
Смирнов Г. П. 8857 Д
Смирнов С. В. 9144
Соболев С. Л. 9098
Содномов Б. С. 8703
Соколов П. В. 8777
Сонсяда Э. 8644
Суетин П. К. 8729
Сыпчук П. П. 9196
Ся Дао-син 8751

Т

Таланцев А. Д. 9176
Томода 9141
Трапезников В. А. 9176
Трахтенброт Б. А. 8530

Трофимов П. И. 8596, 8597
Тумаркин Л. А. 8669
Турковский В. А. 8741

У

Урбаник К. 8962

Ф

Фаддеев Д. К. 8635
Фет А. И. 8677
Филиппов П. В. 9027
Фихтенгольц Г. М. 8907 К
Фиш М. 8962
Фрейд 8719
Фрейман Г. А. 8538
Фридман В. М. 8884
Фридман Л. М. 8492
Фуксман Н. А. 8762

Х

Хавинсон С. Я. 8734, 8735
Хажалия Г. Я. 8867
Халатников И. М. 9100
Хованский Г. С. 9145
Хокари 9014 К
Ху Синь-юэ 8588
Хусу А. П. 9000

Ц

Цалюк З. Б. 9110
Цзинь Пинь 9006
Цинь Юань-сюнь 8784

Ч

Черников С. Н. 8615
Черняев М. П. 8493
Четаев Н. Г. 8807 К
Чжоу Бо-сюань 8540
Чунихин С. А. 8598

Ш

Шагинян А. Л. 8733
Шаманский В. Е. 8746
Шафрановский И. И. 8491
Шварц А. С. 8684
Швецов К. І. 8499
Шилов Г. Е. 8815

Э

Эйдельман С. Д. 8844
Эйдус Д. М. 8827

Я

Яблоков В. А. 8818
Яворовский Я. В. 8676
Яковлев И. А. 9106
Яковлева Г. Ф. 8890
Янь Ши-цзянь 8540
Ярышева И. М. 9105

A

Abrham J. 8566
Ahlin F. 8519
Aissen M. I. 8893
Aitken A. C. 9131
Agostinelli C. 8861
Andersen A. F. 8918
Andersen E. S. 8965, 8966
Anema A. S. 8564
Angell J. B. 9199
Aquaro G. 8779
Araki S. 8685
Arneodo C. 9107
Artzy R. 9072
Astin A. V. 9221
Atkinson C. 9143

B

Babuška I. 9101
Bade W. G. 8949
Baiada E. 8710
Bain M. B. 9195
Balachandran V. K. 8663
Baldacci R. F. 8874
Ball R. W. 8583 К
Barbilian D. 8655
Barker R. H. 9172
Barney K. H. 9218 П
Bauer H. 8951
Beale M. 8988
Beale E. M. L. 8992
Beaumont R. A. 8583 К
Beck W. A. 8959 Д
Becker H. W. 8570
Behnke H. 8755
Bellman R. 8938 К, 8990, 8991
Benedicty M. 8637
Bennett B. M. 8981
Berger M. 9078
Bhattacharya S. N. 9064
Bihari I. 8922
Bilo J. 9034
Birch B. J. 8553
Blackwell D. 8517
Blanuša D. 9059
Blasbalg H. 9194
Blatter C. 9124
Blondel J.-M. 8809
Blum R. 9060
Bojanič R. 8927
Bol G. 9047
Boone W. W. 8531
Borel A. 9082
Bose B. N. 8930
Bowker A. H. 8517
Boxer R. 8773
Bradley W. E. 9197
Brauner H. 9029
Browkin G. 8562
Brown W. F., Jr 9212
Brownell F. H. 8852, 8950
Bruhat F. 8961 Д
Brun V. 8503
Bruns G. 8700
Buicliu G. 8521

C

Caccioppoli R. 8697
Cahill W. F. 9170
Cameron R. H. 8886
Campbell R. 8898
Carlitz L. 8559, 8636
Castagno A. 8743
Chak A. M. 8931
Chalk J. H. H. 8551
Chamberlin R. E. 8698
Cheng Min-Te 8724 Д
Choquet G. 8835
Ciliberto C. 8841, 8842
Cimmino G. 8812
Clenshaw C. W. 9138
Coddington E. A. 8806 К
Collins W. D. 8866
Conner P. E. 8946
Conolly B. W. 8928
Corey V. B. 9178
Crisler E. H. 9020 Д
Cugliani M. 8548

D

Daïovitch V. 8752
Dalla Volta V. 9076
Davies H. 8830
Dean W. R. 8876
Debever R. 9063
Dedecker P. 8647
De Luca R. 8573 К
Demaria D. C. 9055
Denjoy A. 8516
Deny J. 8835
Derwidué L. 9041, 9115
De Schwarz M. J. 8935, 8936
Descombes R. 8549, 8550
Deuker E. A. 8971
Deutsch M. L. 9224
Diaz J. B. 8819
Divinsky N. 8658
Doetsch G. 8933 К
Drazin M. 8988
Dreyer H. J. 9163
Driml M. 8566
Dubreil P. 8580 К
Duff G. F. D. 8814
Duleau J. 9130
Durand E. 8825
Dux E. 8909
Dvoretzky A. 8727

E

Ebel I. 8554
Edge W. L. 9035
Ehrenpreis L. 8957
Ehrhart E. 8565
Ehrling G. 8792
Eilenberg S. 8648
Elston F. G. 8570
Emersleben O. 8506
Erdélyi A. 8853
Erdös P. 8589, 8727
Erismann T. 9191
Ezra J. 8817

F

Filippi L. 9042
Fisz M. 8962
Fjellstedt L. 8556, 8557
Flanders H. 8641
Fleischer I. 8664
Fort M. K., Jr 8799
Fort T. 8899
Fraïssé R. 8535, 8536
Fréchet M. 8943
Freedman B 8591
Frenkel J. 8682, 8694
Freud G. 8718
Fujita H. 8813
Furtwängler P. 8666 К

G

Gabriel R. M. 8826
Gabriel R. M. 8826
Gacsályi S. 8606
Gagliardo E. 8838
Galbură Gh. 9018 К
Gale D. 8994 Д
Gallaher B. M. 9210
Gallarati D. 9038
Ganea T. 8622
Gans D. 9030
Gardiner V. 8567
Gel'fand I. M. 8953
Gerber R. 8736
Gheorghiu Gh. T. 8525
Ghermănescu M. 8732, 8775, 8904
Gião A. 9181
Glaser E. M. 9194
Godeaux L. 9037, 9040, 9048
Goldenberg H. 8937
Goodstein R. L. 8529
Graev M. I. 8953
Graffi D. 8868
Grenander U. 8978
Gross B. 8934
Grotemeyer K. P. 9097
Grott J. de 8671
Gull C. D. 9173
Gurland J. 8968

H

Hadamard J. 8839
Hadwiger H. 9096
Hahn W. 8796
Haimovici M. 9053
Hamilton H. J. 8770
Hanani H. 9091
Harder E. L. 9187
Harris G. Z. 8876
Hartman P. 8798, 8822, 8836
Hatch R. W. 9226
Hayashi K. 8761
Heap W. O. 9211
Heffter L. 8768 К
Hefron W. G. 9190
Heinhold J. 9179
Helfenstein H. G. 9092
Heller P. N. 9188
Henrici P. 9136
Hercigonja M. 8563
Herkart P. G. 9202
Herzog F. 8726
Hicks J. S. 9224

Higman G. 8651
Hille E. 8840
Hirasawa Y. 8789
Hirsch G. 8681, 8683
Hladik A. 8878
Hlavatý V. 9084
Honda K. 8605
Householder A. S. 9139

I

Ibrahim E. M. 8602
Imai T. 9071
Inoue Y. 8690, 8691
Ionescu D. V. 9125
Ionescu T. C. 9018 К
Iséki K. 8954, 8955

J

Jacobson N. 8660
Jambunathan M. V. 9008
James A. T. 8619
James G. S. 8982
Järnefelt G. 8881, 9089
Jarník V. 8514, 8908 К
Jeenel J. 9137
Jensen A. 8984
Joerden R. H. 9210
John F. 8810
Johnson A. B. 9177
Jones B. W. 8575 К

K

Kac M. 8543
Kallianpur G. 8972
Kansas R. 9200
Karlin S. 8964
Kasch F. 8541
Katz L. 8976
Kaye J. 8999
Keeping E. S. 8989
Keiper E. P., Jr 9199
Kelling L. U. C. 9222
King R. F. 8808 Д
Kline M. 8871
Klingenberg W. 9087
Koecher M. 8620
Kohlmann C. 9132
Kořínek V. 8526
Kosambi D. D. 9074
Kosmák L. 9007
Koszul J. L. 8624
Kramer E. 8632 Д
Kreyszig E. 8757
Krzywicki A. 8865
Kuhn P. 8547
Küpfmüller K. 9167
Kurepa G. 8558
Kurihara Y. 9142
Kurshan J. 9202
Kusko A. 9188

L

Lampard D. G. 8997
Lanczos C. 9114
Lariviere R. 8910
Lasareff V. 9203
Lavin M. M. 8993
Lavoine J. 8932
Lazarus R. 8567
Ledermann W. 8600
Legrain-Pissard N. 9052
Lefschetz S. 8787
Leimanis E. 8803
Lesemann K.-J. 9184
Levinson N. 8806 К
Levitzki J. 8657
Lévy P. 8520
Levy S. 9170
Lewy H. 8846
Lichnerowicz A. 9079
Liebmann G. 9193
Lions J.-L. 8854
Littlewood D. E. 8599, 8603
Llorente Gonzalez Gallarza F. 8892
Longo C. 9057
Lord F. M. 9146
Loś J. 8607
Lösch Fr. 9152 К
Ludford G. S. S. 8819
Łukaszewicz L. 9180
Luke Y. L. 9134
Lyndon R. C. 8659
Lyon G. 9186

M

Maak W. 8956
McCoy N. H. 8650
McFerren E. L. 9220
McLain D. H. 8613
Madić P. 9192
Magenes E. 8834
Mahowald M. E. 8960 Д
Mandan S. R. 9004
Mann H. B. 8979
Marek J. M. 9117
Mardešić S. 8680
Marinescu G. 8942
Markus L. 8678
Martić L. 8501
Martin M. H. 8873
Mathews P. M. 8780
Matsushita S. 8759, 8760
Megaw H. D. 9182
Mejzlík L. 9101
Meschkowski H. 9841
Metropolis N. 8567
Meynieux R. 9036
Middlemiss R. R. 9016 К
Middleton D. 8995, 8996
Mihăilescu T. 8772
Mihoc G. 8509
Mikolás M. 8915
Mittmann O. M. J. 9002
Mitrinović D. S. 8487
Mizohata S. 8843
Moisil G. C. 8767
Montel P. 8513
Moran P. A. P. 9001, 9128
Moranda P. B. 8979
Morikawa H. 9043
Morita K. 8670
Moriya M. 8640
Mostowski A. 8634, 8644
Motchane L. 8702
Motzkin T. S. 8593
Moustafa M. D. 8974
Mügel K. W. 8753
Mulholland H. P. 8750
Müller H. R. 9023
Murnaghan F. D. 8604
Murton C. R. 9171

N

Nagata M. 8646
Nagel E. 8532
Naïm L. 8828
Naimark M. A. 8952
Nakae T. 9080
Nakano S. 8693
Nakayama S. 9068
Namian P. 9153
Nasu Y. 9090
Neugebauer O. 8498
Neumann B. H. 8600
Neveu J. 8973
Newman J. R. 8532
Newman M. 8546, 8617, 8618
Nicholson S. C. 9137
Nicola R. N. 9157
Nikodým O. M. 8695
Nöbauer W. 8601
Nöbeling G. 8951
Noble M. E. 8728
Novák B. 8586

O

Obradović I. 9185
Ogawara M. 8980
Offord A. C. 8589
Oneal G., Jr 9212
Orgeval B. de 9039
Orloff C. 8911
Osterle W. H. 9187
Ōtsuki T. 9077
Ozawa M. 8831

P

Page C. H. 8926
Papić P. 8668
Parodi M. 8590
Pauc C. 8696
Pavel M. 8940
Perez Baldres J. 9155
Perron O. 8585
Petersson H. 8544, 8754
Pétrus A. 8894
Picard H. C. 8967
Pickert G. 8595 К
Pimiä L. 9086
Pini B. 8837
Piranian G. 8726
Pleijel A. 8851
Poincelot P. 8882 К
Pólya G. 8849
Popken J. 8569
Popova H. 8627
Popoviciu T. 8891
Popp S. 9018 К
Porges A. 8587
Postelnicu T. 9062
Povšič J. 8512
Prache P. M. 8870
Protter M. H. 8848
Pulvari C. F. 9174
Pupke H. 8594 К
Puppe D. 8688, 8689

Q

Quine W. V. 8533
Qvist B. 9089

R

Rachajsky B. 8820
Rachford H. H. Ir. 9119
Rademacher H. 8545
Radoslovich E. W. 9182
Rajski C. 8977
Ramanathan K. G. 8577 Д
Raševskij P. K. 9085 К
Rašković D. 9003
Raymond F.H. 9181, 9213 К
Reade M. O. 8738
Rédei L. 8579 К, 8608, 8612
Rees D. 8645
Reiner I. 8616
Remmert R. 8756
Rényi A. 8542
Rieger G. J. 8539
Riesel H. 8560
Rizza G. B. 8758
Robin L. 8923
Robinson A. 8665
Roşculeţ M. N. 8764, 8765, 8766
Rose A. 8534
Rothe F. S. 9190
Rowe P. P. 9121
Rozet O 9052
Rüdiger D. 9024
Runyan H. L. 9147 К
Rutishauser H. 9108

S

Samoloff J. 8902
Samuel P. 8638
Sandgren L. 9095
Sansone G. 9046
Sanvitale E. 8573 К
Sąsiada E. 8644
Satterly J. 9005
Schaefer H. 8888 К
Schafer R. D. 8661, 8662
Schieferdecker E. 8626
Schinzel A. 8562
Schmidt J. 8700
Schmidt W. 8552
Schneider J. C. 9225
Schöbe W. 9120
Schultz W. P. 9119
Schwarz E. 9209
Schwarz H. R. 8797
Schwarz R. F. 9201
Schwarz Št. 8518
Scott W. R. 8610
Segre B. 9093, 9094
Seidenberg A. 8639
Seki S. 8701
Selfridge R. G. 9168
Serre J.-P. 9081
Severi F. 9045
Shapiro J. M. 8886
Shapiro V. L. 8714
Sharpe C. B. 8925
Shenton L. R. 8896
Shoda K. 8633
Šilov G. E. 8948
Sinvhal S. D. 8712
Sirao T. 8969
Skolem T. 8528, 8555
Šlechta J. 9028

Smith W. L. 8963, 8998
Solian A. 8611
Soroka W. W. 9214 К
Sperner E. 9017 К
Srinivasan S. K. 8780
Standish C. 8929
Stanley R. 8537
Stein P. 8776
Stone J. J. Jr 9216.
Stoppelli F. 8875
Storrer F. 9135
Stratton H. E. 9210
Strubecker K. 9021
Sugiyama S. 8785
Suguri T. 9068
Swann B. B. 9160
Synge J. L. 8832
Szamosi G. 8527
Szász F. 8609
Szász P. 8912, 9031, 9088
Szele T. 8642
Szélpál I. 8643
Szendrei J. 8654
Szép J. 8612

T

Taam Choy-Tak 8783
Takahashi S. 8975
Takano K. 9071, 9075
Takeno H. 9069
Tashiro S. 8829
Tate J. T., Jr 8578 Д
Taussky O. 8593
Taylor G. 8507
Teleman C. 9010
Terracini A. 9056
Thaler S. 8773
Thierrin G. 8625, 8629 К
Thom M. R. 8679
Tiley J. W. 9198
Toda H. 8692
Tomber M. L. 8661
Tomić M. 8927
Tominaga H. 8652, 8653
Tonnelat M.-A. 9083
Tonolo A. 8869
Tonooka K. 9073
Trombetti C. 9164
Tugué T. 8704
Turán P. 8801

U

Ueno S. 9061
Ulam S. 8567
Urbanik K. 8962
Utz W. R. 8571

V

Van der Waerden B. L. 8582 К
Van Meter D. 8996
Villa E. 8496
Villamayor O. E. 8656
Vincensini P. 9050
Vrănceanu G. 9065, 9067, 9070
Vučković V. 8919

W

Wallace A. H. 9044
Walsh J. F. 9201
Warschawski S. E. 8737
Watkins C. E. 9147 К
Watson G. N. 8592
Weinstein A. 8811
Weitzenböck R. W. 9011 К
Werry W. W. 9165
Weyl H. 9012 К
Weyrick R. C. 9192
Williams R. A. 9198
Williams R. F. 8674
Winter D. F. 9217 П
Wintner A. 8798, 8822, 8836
Witt E. 8621
Woolston D. S. 9147 К
Work T. A.' Jr 9228 П
Wright R. G. 9225
Wunderlich W. 9025

Y

Young R. L. 9111

Z

Zappa G. 8581 К
Zbornik J. 8771
Ziebold T. O. 9162
Zühlke P. 8522
Zyczkowski M. 9118

伊藤清三 8944
周伯壎 8540
友田好文 9141
中山正 8667
吉田耕作 9149
嚴士健 8540

大島勝 8630
宮澤光一 8987
小林龍一 9013
岩田至康 8494
康鼎羅契 Л. В. 8958
夏道行 8751

木村勇三 8906
木村直樹 8905
穗刈三二 9014
秦元勳 8784
胡新月 8588

野澤豊吉 8924
金品 9006
関嗣鶴 8568
鬼頭史城 9148
点須康之介 8584

ПОПРАВКИ И ДОПОЛНЕНИЯ

К реф. 2846 (1954 г.)

Фамилия автора статьи указана неверно: написано „Миклош", следует читать „Миколаш".

К реф. 3011 (1956 г.)

В последней строке реферата вместо слов „обобщенное решение" должно быть „общее решение". А. Ф. Андреев

К реф. 3079 (1956 г.)

Функции Ангера (строки 7, 8 и 12) должны быть обозначены через J. В соответствии с этим числитель в правой части формулы стр. 8 следует читать так:

$$J_{s/\alpha}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right) - J_{s/\alpha}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right),$$

а последнюю формулу реферата так:

$$J_\nu(u) - \frac{u}{2\nu}\left[J_{\nu-1}(u) + J_{\nu+1}(u)\right] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}.$$

П. И. Кузнецов

К реф. 3734 (1956 г.)

Стр. 35, правая колонка, строка 19 сверху — напечатано: $\overline{z_p^n}, \ldots z_p^n$, следует читать $z_p^1, \ldots, z_p^n$; строка 14 снизу — напечатано „точкой", следует читать „точной".

К реф. 3859 (1956 г.)

Строки 5 — 7 снизу: напечатано „Перечисленные погрешности легко исправимы. Авторы отметили следующие дефекты . . . "

Следует читать: „Перечисленные погрешности легко исправить, на что референту указано авторами статьи. Авторы также отметили следующие дефекты . . . ".

К реф. 4467 (1956 г.)

В реферат вкралось большое количество опечаток. Среди них наиболее существенны следующие:

Строка	Напечатано	Должно быть
9 сверху (и в некоторых других местах)	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{b}$
9 сверху	f_2	f_1
13 сверху	$\mathfrak{w} = \mathfrak{R}'x)$	$\mathfrak{b} = \mathfrak{B}(x)$
20 сверху	$\mathfrak{b} - \mathfrak{z}(x)$	$\mathfrak{b} - \mathfrak{B}(x)$
16 снизу (по одному разу)	$\mathfrak{z}, t\mathfrak{z}$	$\mathfrak{w}, t\mathfrak{w}$
12 снизу	неравенство должно быть занумеровано (2)	
6 снизу	$\mathfrak{B} = \mathfrak{b}(x)$	$\mathfrak{b} = \mathfrak{B}(x)$

А. Д. Мышкис

Технический редактор *Р. М. Денисова*